Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Der große Satz von Picard mit Anwendungen

Diplomarbeit
in Mathematik

vorgelegt von
Gregor Balci
im Juli 2013

1. Gutachter: Prof. Dr. W. Kratz
2. Gutachter: Prof. Dr. G. Baur

Danksagung

Vielen Dank an Prof. Dr. Werner Kratz für das großartige Thema und die konstruktive Betreuung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zusammenfassung

Motivation. …„Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht – oder ob er meinem Grundsatz beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbstständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt sein würde…“. Diese denkwürdigen Zeilen schrieb C.F. Gauß am 18. Dezember 1811 an Bessel.

Mit seiner Dissertation[1] zum Fundamentalsatz der Algebra offenbarte C.F. Gauß das Potenzial der imaginären Zahlen und leitete damit die Geburtsstunde der Funktionentheorie ein. In den folgenden Generationen errichteten bedeutende Mathematiker wie A.L. Cauchy, K. Weierstraß und B. Riemann ein Lehrgebäude mit einem schier unerschöpflichen Reichtum an schönen und tiefen Sätzen.

Schließen nun auch wir uns dem Grundsatz von C.F. Gauß an und betrachten ganze Funktionen wie die komplexe Sinusfunktion, welche jeden komplexen Wert annimmt und die komplexe Exponentialfunktion, die nur die Null auslässt, so liegt die Vermutung nahe, dass ganze Funktionen jeden Wert aus $\mathbb{C}$ mit nur höchstens einer Ausnahme annehmen. Dieses Werteverhalten ganzer Funktionen war bereits C.F. Gauß nicht fremd, doch sollte es E. Picard vorbehalten bleiben diese Vermutung 68 Jahre nach jenem Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel zu beweisen.

[1] Vgl. [Gau15].

Die folgende Zusammenfassung soll den Leser in die Thematik einführen und einen ersten Eindruck hinsichtlich der Beweisstrukturen wichtiger Sätze vermitteln.

Kapitel 1. Bevor wir mit der eigentlichen Ausarbeitung beginnen, wollen wir grundlegende Resultate der Funktionentheorie bereitstellen, derer wir uns in den folgenden Kapiteln regelmäßig bedienen. Eines der wesentlichsten ist dabei der Cauchysche Integralsatz, der im Kern die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen beschreibt und ein unentbehrliches Korollar dieser Arbeit impliziert, wenn zusätzlich Nullstellenfreiheit gefordert wird. Es besagt, dass eine holomorphe und nullstellenfrei Funktion stets eine holomorphe Exponentialdarstellung besitzt. Ein weiteres Hilfsmittel ist die Cauchysche Integralformel, die als Konsequenz des Cauchyschen Integralsatzes im Wesentlichen besagt, dass sämtliche Werte einer holomorphen Funktion im Inneren einer Kurve bereits durch deren Funktionswerte auf dem Rand bestimmt sind. Darüber hinaus legen wir uns den Riemannschen Hebbarkeitssatz, das Maximumprinzip und den Fundamentalsatz der Algebra zurecht und zitieren in erster Linie aus dem Vorlesungsskript von W. Kratz, dem ersten und zweiten Band der Funktionentheorie von R. Remmert und G. Schumacher sowie dem ersten Band zur Funktionentheorie von E. Freitag und R. Busam.

Kapitel 2. Wir beginnen mit der Ausarbeitung des Blochschen Satzes, der als das zentrale Hilfsmittel dieser Arbeit maßgebend ist und von A. Bloch 1924 entdeckt wurde[2]. Dieser hat seinen ganz eigenen Reiz, denn er ermöglicht eine universelle Aussage über die Größe des Bildgebietes nichtkonstanter holomorpher Funktionen. Als erstes führen wir dazu die erforderlichen Hilfssätze wie die Cauchysche Ungleichung und die Parsevalsche Gleichung ein. Ersterer liefert eine obere Schranke für den Betrag der Koeffizienten einer Potenzreihe, während der Zweite eine Integraldarstellung sowie eine Abschätzung für die reelle Reihe $S := \sum |a_k|^2 r^{2k}$ bereithält, wobei die a_k's Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion f um Null mit positivem Konvergenzradius $R > r \geq 0$ sind. Damit zeigen wir in Korollar 2.5, dass sich die zweite Partialsumme von S durch das Betragssupremum von f^2 in der R-Umgebung von Null nach oben abschätzen lässt. Anschließend werden wir in der Lage sein Lemma 2.6 zu beweisen, welches eine erste Aussage über die Bildgröße einer eingeschränkten Familie von Funktionen ermöglicht. Genauer gibt es dann eine Kreisscheibe im Bildgebiet einer Funktion f aus jener Familie, deren Radius aber noch von drei Größen abhängt, die allesamt den Voraussetzungen an f entnommen sind. Wir werden sehen, dass sich diese Voraussetzungen deutlich verallgemeinern lassen und eine Aussage über die Bildgebietgröße bereits dann getroffen werden kann, wenn nur die Ableitung im Mittelpunkt einer abgeschlossenen Eins-Umgebung ungleich Null ist. Diese Verallgemeinerung ergibt sich mittels Normierung aus dem Blochschen Satz, welcher besagt, dass das holomorphe Bild der Einheitskreisscheibe stets eine $\frac{1}{16}$-Umgebung enthält, solange die Ableitung in Null betragsmäßig größer Eins ist.

Um dies zu zeigen setzen wir also voraus, dass der Betrag der Ableitung von f in Null mindestens Eins ist, definieren eine Hilfsfunktion $\mu(s) = sM_1(1-s)$ für $0 \leq s \leq 1$ mit den Eigenschaften $\mu(1) = |f'(0)| \geq 1$ und $\mu(s) \to 0$ für $s \to 0+$ und fixieren ein ρ aus $[0,1]$ derart, dass $\mu(\rho)$ mindestens Eins und $\mu(\frac{\rho}{2})$ echt kleiner Eins ist, wobei $M_1(1-s)$ das Betragsmaximum der ersten Ableitung im Kreis $|z| = 1-s$ beschreibt. Ferner soll $M_1(1-\rho)$ in ζ angenommen werden. Wir werden sehen, dass die Funktion $g(z) := f(z+\zeta) - f(\zeta)$ dann alle Voraussetzungen von Lemma 2.7 in der $\frac{\rho}{2}$-Umgebung von Null erfüllt und somit eine Kreisscheibe gemäß Lemma 2.7 im Bild der $\frac{\rho}{2}$-Umgebung von Null liegt. Spätestens hier wird dem Leser die Absicht des bisherigen Beweisaufbaus klar werden, denn alle drei Größen, die nach Lemma 2.7 miteinander verrechnet den Radius $\tilde{\rho}$ festlegen, sind jeweils nur

[2] Vgl. [Blo24, Seite 2051].

noch von einer Größe abhängig, und zwar ρ. Darüber hinaus schätzen wir diesen Ausdruck zweckmäßig nach unten ab, so dass sich ρ kürzen lässt und $\frac{1}{16}$ als untere Schranke für $\tilde{\rho}$ über bleibt. Mit geeigneter Substitution folgt schließlich die Behauptung des Blochschen Satzes. Es gibt dann also stets ein η in $\mathbb{C}$, so dass eine $\frac{1}{16}$-Umgebung von η im Bildgebiet liegt. In Bemerkung 2.9 stellen wir klar, warum eine Aussage des Blochschen Satzes auch dann möglich ist, wenn lediglich eine nichtkonstante holomorphe Funktion vorausgesetzt wird. Tatsächlich liegt nämlich eine Scheibe mit Radius $\frac{1}{16}|f'(z_0)|$ im Bildgebiet, falls die Ableitung im Mittelpunkt z_0 von Null verschieden ist, wobei hier der Mittelpunkt einer beliebigen Eins-Umgebung gemeint ist.

Für eine einfach zusammenhängendes und Null enthaltendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, in dem f holomorph und die Ableitung in Null von Null verschieden ist, verschärfen wir Bemerkung 2.9 in Korollar 2.10 dahingehend, dass das Bildgebiet von f Scheiben vom Radius $d \cdot \frac{1}{16}|f'(0)|$ beinhaltet, wobei d eine Zahl echt kleiner dem minimalen Abstand von Null zum Rand ist. Für $G = \mathbb{C}$ ist dann offensichtlich jedes d zulässig, weshalb das Bild Scheiben von jedem Radius enthält. Mit Beispiel 2.11 schließen wir dann das zweite Kapitel.

Kapitel 3. Hier werden wir uns mit dem Satz von Ahlfors auseinandersetzen. Obwohl der Beweis nicht einfach ist und einiges an Vorbereitung abverlangt, lohnt sich der Aufwand, denn mit dem Satz Ahlfors verbessern wir unsere Schranke des Blochschen Satzes um fast das Siebenfache auf $\frac{\sqrt{3}}{4}$. L. Ahlfors gewann seinen Satz aus seiner differentialgeometrischen Version des Schwarzschen Lemmas[3]. Wir aber geben den derzeit wohl einfachsten Beweis von M. Bonk[4]. Die Idee hinter dem Beweis zum Satz von Ahlfors ist die betragsmäßige Maximierung der Ableitung in Null, denn gemäß Bemerkung 2.9 führt dies zu einer größeren Kreisscheibe im Bildgebiet. Daher beginnen wir Kapitel 3 mit Extremalaufgabe 3.1: Finde eine Funktion F mit $F(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E})$ und größtmöglicher Ableitung $N > 0$ in Null, wobei F und f in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe holomorph seien. In Zusatz 3.2 geben wir eine Abschätzung für den Betrag der ersten Ableitung von F in der Einheitskreisscheibe.

Wir beginnen den Beweisaufbau mit Lemma 3.3, das an sich schon interessant ist, denn für eine holomorphe Funkion h, deren Ableitung sich auf der Einheitskreisscheibe durch den Kehrwert von $1 - |z|^2$ gemäß Zusatz 3.2 nach oben abschätzen lässt und in Null die Eins annimmt, verschwindet die zweite Ableitung in Null. Um den Überblick nicht zu verlieren gehen wir dann über zu Lemma 3.4, welches im Grunde aber nur eine Fortsetzung von Lemma 3.3 ist, da wir die Voraussetzungen unverändert übernehmen. Lediglich die Bezeichnung ist eine andere, denn wir nennen unsere Funktion dann F statt h, da im Anschluss unter F die Lösung der Extremalaufgabe 3.1 verstanden wird. In Lemma 3.4 leiten wir eine Abschätzung (nach unten) für den Realteil der ersten Ableitung von F in der $\frac{1}{\sqrt{3}}$-Umgebung von Null her. Zunächst klären wir dabei, weshalb es hinreichend ist die Aussage nur für reelle Zahlen aus jener Umgebung zu beweisen und konstruieren dann eine Funktion G zusammengesetzt aus F', p und q, wobei p und q Hilfsfunktionen sind, die wir vorab definieren und auf Abbildungsverhalten untersuchen. Wir werden sofort erkennen, dass G holomorph ist in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe ohne die Eins, wobei zunächst ein Pol in Eins vermutet wird. Tatsächlich wird sich aber herausstellen, dass die isolierte Singularität in Eins hebbar ist und damit G holomorph in jener offenen Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir, dass der Realteil von G nicht negativ in $[0, 1]$ ist und leiten damit die behauptete Abschätzung für den Realteil von F' in $[0, 3^{-1/2}]$ her, womit diese dann auch in der ganzen $\frac{1}{\sqrt{3}}$-Umgebung von Null gilt.

[3] Vgl. [Ahl38].

[4] Vgl. [Bon90, Seite 364].

Unter welchen Voraussetzungen eine Funktion biholomorph abbildet und wann eine Scheibe mit Radius $s := \min|f(z) - f(a)| > 0$ um einen Bildpunkt $f(a)$ im Bildbereich liegt, wobei das Minimum von s nur auf dem Rand der Definitionsmenge zu suchen ist, erklären wir in Lemma 3.5 und Lemma 3.6. Zur Formulierung des Satzes von Ahlfors führen wir noch den Begriff der schlichten Scheibe in Definition 3.7 ein, wonach eine Scheibe schlicht heißt, wenn sie ein biholomorphes Bild darstellt.

Nach dieser umfangreichen Vorarbeit können wir dann den Satz von Ahlfors zitieren und relativ leicht zeigen. Dazu setzen wir f als holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe und $N > 0$ als maximierte Ableitung in Null gemäß Extremalaufgabe 3.1 voraus. Dann besagt der Satz von Ahlfors, dass das Bild der Einheitskreisscheibe unter f schlichte Scheiben vom Radius $\frac{\sqrt{3}N}{4}$ enthält. O.B.d.A. nehmen wir im Beweis $N = 1$ an, da ansonsten $\frac{1}{N}f$ betrachtet werden könnte und wählen F gemäß Extremalaufgabe 3.1. Wegen $N = 1$ liegt die Ableitung von F in Null auf dem Einheitskreis und es genügt wiederum mittels Normierung nur $F'(0) = 1$ zu betrachten. Unter Anwendung von Lemma 3.4 und Lemma 3.5 werden wir dann zeigen, dass die $\frac{1}{\sqrt{3}}$-Umgebung von Null durch F biholomorph abgebildet wird. Hinterher schätzen wir den Abstand von F in Null zu F in einem beliebigen Randpunkt der $\frac{1}{\sqrt{3}}$-Umgebung von Null nach unten durch $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ab und folgern mit Lemma 3.6, dass das Bild dieser Umgebung unter F Scheiben vom Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$ enthält. Weil F nach Extremalaufgabe 3.1 eine Komposition von f mit einem Automorphismus g ist, werden wir das bisherige Ergebnis auch auf das Bild der Einheitskreisscheibe unter f übertragen können. Heben wir die Normierung zu Beginn des Beweises wieder auf, so enthält das Bild der Einheitskreisscheibe unter f Scheiben vom Radius $\frac{\sqrt{3}N}{4}$.

In Korollar 3.9 stellen wir den Satz von Ahlfors dem Blochschen Satz aus Kapitel 2 klar gegenüber, indem wir die Voraussetzungen des Blochschen Satzes übernehmen und mit dem Satz von Ahlfors unmittelbar folgern, dass das Bildgebiet Scheiben von Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$ enthält.

Kapitel 4. Während wir in Kapitel 3 eine Exkursion zur Verbesserung der Blochschen Schranke anbieten, soll in Kapitel 4 wieder das Zwischenziel dieser Arbeit angestrebt werden: Der kleine Satz von Picard. Er besagt, dass eine nichtkonstante ganze Funktion jeden Wert aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme annimmt. Um einen historischen Einblick in die Beweisentwicklung zum kleinen Picardschen Satz zu erlangen, werden wir die Beweise von E. Landau und H. König in chronologischer Reihenfolge ausarbeiten und so eine Tendenz hin zu eingänglicheren Beweisen aufzeigen. Wir leiten Kapitel 4 mit dem Lemma 4.1 von Landau (1916) ein, welches unter der Voraussetzung einer null- und einsstellenfreien holomorphen Funktion f eine implizit beschriebene Funktion g erklärt, deren Bildgebiet keine Eins-Umgebung enthält. Als erstes zeigen wir dazu die implizite Darstellung gegeben durch $f(z) = \exp\Big[\pi i\Big(1 + \cosh\big(2g(z)\big)\Big)\Big]$, indem wir hyperbolische Funktionen und deren Beziehungen zueinander verwerten. Im zweiten Teil des Beweises werden wir mit der Einsstellenfreiheit von f, der $2\pi i$-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion und etwas technischem Aufwand ein Gitternetz konstruieren, dessen Gitternetzpunkte von g ausgelassen werden und Maschen nirgends eine Eins-Umgebung vollständig umschließen. Folglich gibt es keine Eins-Umgebung im Bildgebiet von g. Im Zusatz 4.3 definieren wir noch $\psi_0 := g(0)$ und $\psi_1 := g'(0)$ in Abhängigkeit von $f(0)$ und $f'(0)$ und kommen später, im Laufe der Vorbereitungen zum großen Picardschen Satz, darauf zurück.

Schließlich beweisen wir mit dem Landauschen Lemma den kleinen Satz von Picard in dem wir widerlegen, dass eine ganze Funktion f, die wenigstens zwei Werte aus $\mathbb{C}$ auslässt, nicht konstant ist. Hierzu schließen wir o.B.d.A. Null und Eins aus dem Bildgebiet von f aus und garantieren so die Existenz einer ganze Funktion g gemäß dem Landauschen Lemma, deren Bildgebiet keine Eins-Umgebung enthält. Anschließend definieren wir eine Hilfsfunktion $h(z) := \frac{1}{16}g(l(z))$ mit einer geeigneten linearen Abbildung $l(z)$ derart, dass einerseits keine $\frac{1}{16}$-Umgebung im Bild der Einheitskreisscheibe unter h liegt, andererseits die Voraussetzungen des Blochschen Satzes von h erfüllt werden, was wiederum eine $\frac{1}{16}$-Umgebung im Bild der Einheitskreisscheibe unter h impliziert. Der offensichtliche Widerspruch verifiziert dann die Behauptung. Mit einer alternativen Fassung des Picardschen Satzes und einer Variante für meromorphe Funktionen gehen wir über zum alternativen Beweis von H. König und stellen diesen der Landauschen Variante gegenüber. Wir schließen das vierte Kapitel, indem wir unter Verwendung von Korollar 2.10 den Beweis zum kleinen Satz von Picard elegant in zwei Zeilen ausdrücken.

Kapitel 5. Hier werden wir den kleinen Satz von Picard zur Anwendung bringen. Für eine ganz Funktion f, die keine Translation ist, werden wir unter Gebrauch des kleinen Picardschen Satzes nachrechnen können, dass $f \circ f$ stets einen Fixpunkt in $\mathbb{C}$ hat. Wir schließen indirekt und nehmen dazu an, dass $f \circ f$ fixpunktfrei ist. Weil damit aber auch f fixpunktfrei ist, lässt sich sofort eine ganze Funktion definieren, die weder Null noch Eins annimmt und dem kleinen Picardschen Satz zufolge konstant ist. Mittels Differentiation werden wir dann nachweisen, dass f fixpunktfrei und linear, also eine Translation ist.

Eine schöne Anwendung ergibt sich aus der Fermat-Gleichung. Genügen nämlich zwei ganze Funktionen f und g der Fermat-Gleichung $f^n + g^n = 1$ für $n \geq 3$, so lässt sich mit dem kleinen Picardschen Satz zeigen, dass f und g konstant sind. Vorweg betrachten wir den Fall $n = 2$ und bestimmen alle Lösungen noch leicht mittels konventioneller Hilfsmittel wie Korollar 1.4. Für $n \geq 3$ faktorisieren wir $f^n + g^n$ in mindestens drei nullstellenfreie Hilfsfunktionen, zusammengesetzt aus f, g und den n-ten Einheitswurzeln, und konstruieren aus diesen unter Verwendung von Korollar 1.4 eine ganze Funktion, welche wenigstens zwei Werte aus $\mathbb{C}$ nicht annimmt. Mit Anwendung des kleinen Picardschen Satzes folgt dann, dass f und g konstant sind.

In der ersten Behauptung der dritten Anwendung benutzen wir den kleinen Satz von Picard um Eigenschaften transzendenter Funktion aufzuzeigen: Zu jeder transzendenten Funktion f gibt es höchstens ein Polynom p ohne gemeinsame Schnittpunkte. Hier werden wir einen Widerspruchsbeweis führen und die Annahme widerlegen, dass es zwei Polynome p und q mit $p \neq q$ gibt, die jeweils keine Schnittpunkte mit f haben. Wieder konstruieren wir eine ganze Hilfsfunktion h aus f, p und q, so dass diese Null und Eins auslässt und nach dem kleinen Picardschen Satz konstant ist. h wieder nach f umgeformt, werden wir erkennen, dass f eine polynomiale Darstellung zusammengesetzt aus p und q einnimmt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit wird dann die zweite Behauptung unter Zuhilfenahme des Fundamentalsatzes der Algebra gezeigt: Es gibt keine ganze Funktion g mit $g(z) \neq z$ und $g(z) \neq -z$ für alle z aus $\mathbb{C}$. Ergänzend werden wir diese Aussage auch direkt mit dem kleinen Picardschen Satz beweisen ohne auf den Fundamentalsatz der Algebra zurückzugreifen.

Kapitel 6. In diesem Kapitel beginnen wir mit der Ausarbeitung des großen Satzes von Picard und formulieren dazu die Sätze von Landau und Schottky. In Lemma 6.2 werden wir in Anlehnung an Zusatz 4.3 nachweisen, dass ψ_1 wohldefiniert ist und es eine diskrete Punktmenge gibt, in der ψ_0 nicht liegen darf. Eine unerwartete Aussage liefert anschließend der Satz von Landau, denn sei f eine holomorphe Funktion in einer R-Umgebung um den Nullpunkt, wobei der Radius R echt größer einer Schranke abhängig von ψ_1 ist, so liegt entweder Null oder Eins im Bild dieser R-Umgebung unter f. Zum Nachweis nehmen wir an, dass f eins- und nullstellenfrei ist in jener R-Umgebung um Null. Dann gibt es eine holomorphe Funktion g, deren Bild gemäß dem Landauschen Lemma keine Eins-Umgebung enthält. Einen Widerspruch erhalten wir dann mit dem Blochschen Satz. Spätestens in Korollar 6.4 erkennt der Leser den besonderen Stellenwert des Landauschen Satzes, denn dieser impliziert gänzlich unerwartet den kleinen Picardschen Satz. Daraufhin formulieren wir den Satz von Schottky, welcher eine Abschätzung (nach oben) für den Betrag einer null- und einsstellenfreien Funktion f liefert, wobei diese Abschätzung von $f(0)$ und einem Radius r echt kleiner Eins abhängt und in der abgeschlossenen r-Umgebung von Null zulässig ist. Aufgrund der Voraussetzung ist es naheliegend, dass wir auch diese Aussage mit dem Landauschen Lemma zeigen. Dabei nutzen wir hier nicht nur die Existenz einer holomorphen Funktion g gemäß dem Landauschen Lemma, sondern verwerten auch die in Abhängigkeit von g gegebene Darstellung von f. Nach Korollar 6.6 impliziert der Satz von Schottky dann überraschenderweise sogar den Satz von Landau und mithin den kleinen Satz von Picard. Abschließend formulieren wir in Satz 6.7 eine verallgemeinerte Variante des Schottkyschen Satzes.

Kapitel 7. In diesem Kapitel kommen wir schließlich zur Kernaussage dieser Arbeit, dem großen Satz von Picard. Bevor wir diesen aber formulieren können, werden wir mit Lemma 7.1 noch letzte Abschätzungen für ψ_0 und ψ_1 bezüglich Definition 6.1 bereitstellen. Den Begriff der isolierten Singularität und dessen Klassifizierung führen wir in Definition 7.2 ein, fassen dabei Pole und hebbare Singularitäten unter außerwesentlichen Singularitäten zusammen und wollen unter einer wesentlichen Singularität eine nicht-außerwesentliche verstehen. Um den Erkenntnisgewinn des großen Satzes von Picard hervorzuheben zitieren wir zunächst den Satz von Casorati-Weierstraß, der im Grunde eine schwache Variante des großes Picardschen Satzes darstellt, jedoch vergleichsweise sehr einfach zu zeigen ist. Um beide Sätze begrifflich klar gegeneinander abgrenzen zu können bezeichnen wir noch in Definition 7.3 eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ als dicht in $\mathbb{C}$, falls es zu jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ einen Punkt aus dieser Teilmenge gibt, der diesem (aus $\mathbb{C}$) beliebig nahe kommt. Damit können wir den Satz von Casorati-Weierstraß unmissverständlich formulieren, welcher besagt, dass das Bild einer beliebig kleinen punktierten Umgebung von einer wesentlichen Singularität unter einer holomorphen Funktion f dicht ist in $\mathbb{C}$, das heißt zu jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ gibt es einen Bildpunkt von f, der diesem (aus $\mathbb{C}$) beliebig nahe kommt. Aber ob auch jeder Punkt aus $\mathbb{C}$ tatsächlich angenommen wird, darüber lässt sich nichts sagen!

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass es eine punktierte Umgebung $\dot{U}$ von einer wesentlichen Singularität von f gibt, deren Bild unter f nicht dicht ist in $\mathbb{C}$. Damit gibt es ein $r > 0$ und ein z_* aus $\mathbb{C}$, so dass der Abstand von z_* zu jedem Bildpunkt von f in $\dot{U}$ mindestens r beträgt. Der Kehrwert von $f(z) - z_*$ ist folglich holomorph und beschränkt in $\dot{U}$ und mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz dann auch holomorph in ganz U. Somit ist auch f holomorph in U und hat damit eine außerwesentliche Singularität im Mittelpunkt von U.

Kommen wir schließlich zum großen Satz von Picard und übernehmen unverändert die Voraussetzungen des Satzes von Casorati-Weierstraß, so besagt dieser, dass das Bild einer beliebig kleinen punktierten Umgebung von einer wesentlichen Singularität unter einer holomorphen Funktion f jeden Punkt aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme konkret annimmt!

Den Beweis führen wir indirekt und nehmen dazu an, dass es wenigstens zwei Ausnahmewerte gibt, die nicht im genannten Bildgebiet liegen. O.B.d.A. können wir dazu Null und Eins und als punktierte Umgebung die Einheitskreisscheibe ohne Mittelpunkt betrachten. Das Bild von $\dot{\mathbb{E}}$ unter f ist zunächst dicht in $\mathbb{C}$, denn es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Casorati-Weierstraß. Da es also in jeder noch so kleinen Umgebung von Null ein a gibt mit $\pi^e \leq |f(a)| \leq e^\pi$, lässt sich eine Nullfolge (a_n) festmachen, deren Folgenglieder alle dieser Bedingung genügen. Die Grenzen π^e und e^π des Kompaktums legen wir dabei willkürlich fest, solange Null und Eins ausgeschlossen sind. Hier sei es der Neugierde des Lesers überlassen die Spielerei $\pi^e < e^\pi$ zu zeigen. Damit lässt sich dann eine null- und einsstellenfreie Hilfsfunktion g_n, in Abhängigkeit von f und (a_n), in $\mathbb{E}$ definieren mit $\pi^e \leq |g_n(0)| \leq e^\pi$. Gemäß dem Satz von Schottky ist dann $|g_n|$ in einer Umgebung von Null durch eine obere Schranke c beschränkt, welche sich wiederum auf das Betragsmaximum von f in $|z| = |a_n|$ übertragen lässt. Anschließend betrachten wir den abgeschlossenen Kreisring mit äußerem Rand $|a_1|$ und innerem Rand $|a_n|$. Weil nach dem Maximumprinzip das Maximum von $|f|$ nur auf dem inneren oder äußeren Rand angenommen werden kann und $|f|$ dort beschränkt ist durch c, lässt sich |f| auf dem ganzen Kreisring durch c abschätzen. Da Ferner (a_n) eine Nullfolge ist, lässt sich die innere Peripherie des Kreisrings beliebig verkleinern, das heißt für n gegen unendlich erhalten wir eine punktierte Umgebung um Null, in welcher $|f|$ beschränkt ist durch c. Gemäß dem Riemannschen Hebbarkeitssatz hat dann f eine hebbare Singularität in Null resp. z_0. Damit folgt die Behauptung.

Kapitel 8. Zum Abschluss wollen wir mit dem großen Satz von Picard Eigenschaften ganzer Funktionen ergründen. Als erstes setzen wir dazu in Anwendung 8.1 eine transzendente Funktion f voraus, die wenigstens einen Punkt w_0 aus $\mathbb{C}$ nur endlich oft annehme und zeigen, dass dann f jeden weiteren Wert aus $\mathbb{C}$ unendlich oft annimmt. Zum Nachweis betrachten wir $h(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$. Da w_0 von f nur endlich oft angenommen wird, gibt es eine genügend kleine punktierte Umgebung von Null in der h den Wert w_0 auslässt. Für ein w aus $\mathbb{C}$ ungleich w_0, gibt es dann nach dem großen Satz von Picard stets ein z_0 aus dieser punktierten Umgebung mit $h(z_0) = w$. Mit hinreichender sukzessiver Verkleinerung der punktierten Umgebung, lässt sich stets ein weiteres z_1 ungleich z_0 festmachen, so dass $h(z_1) = w$ ist. Induktiv folgt, dass f jeden Wert aus $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von w_0 unendlich oft annimmt.

In Anwendung 8.2 zeigen wir, dass Polynome ersten Grades die einzigen injektiven ganzen Funktionen sind. Dazu unterscheiden wir transzendente und polynomiale Funktionen und können die transzendenten Funktionen gemäß Anwendung 8.1 sofort als nicht-injektiv abhaken. Für Polynome vom Grad $n \geq 2$ verweisen wir auf den Fundamentalsatz der Algebra und arbeiten im Falle einer n-fachen Nullstelle mit den n-ten Einheitswurzeln. Somit können wir auch Polynome zweiten Grades oder höher als nicht-injektiv erklären. Es verbleiben also nur noch Polynome ersten Grades, die natürlich injektiv sind.

1.2 Hilfsmittel

Definition 1.1.
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das heißt D ist offen und zusammenhängend. Dann heißt D ***einfach zusammenhängend****, falls*

$$\chi(\alpha; z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

und für alle geschlossenen stückweise glatten Kurven $\alpha : [a, b] \to D$.

Diese Definition ist äquivalent mit jeder der folgenden Eigenschaften:

(i) *$D^c := \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ ist* ***zusammenhängend*** *mit $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

(ii) *D ist ein* ***Elementargebiet****, das heißt jede in D holomorphe Funktion besitzt in D eine Stammfunktion.*

Bemerkung 1.2.
Anschaulich verstehen wir unter einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet ohne „Löcher“.

Satz 1.3 (Cauchyscher Integralsatz).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D. Dann gilt

$$\oint_\alpha f(\zeta) d\zeta = 0$$

für jede geschlossene stückweise glatte Kurve α in D.

Korollar 1.4.
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann existiert eine in D holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(z) = \exp\big(h(z)\big).$$

Wir nennen h einen holomorphen Zweig des Logarithmus von f.

Beweis. Es sei F eine Stammfunktion der in $D \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktion f'/f. Dann verschwindet die Ableitung der zusammengesetzten Funktion

$$G(z) := \left(\frac{\exp\big(F(z)\big)}{f(z)} \right)$$

identisch in D, denn

$$G'(z) = \left(\exp\big(F(z)\big) \frac{f'(z)}{f(z)} f(z) - \exp\big(F(z)\big) f'(z) \right) f^{-2}(z) = 0 \text{ für alle } z \in D.$$

Definition 1.1 vgl. [FB06, Kapitel 3, Seite 161-163].
Satz 1.3 vgl. [FB06, Kapitel 4: Folgerung zur Bemerkung A7, Seite 240].
Korollar 1.4 vgl. [FB06, Kapitel 2: Satz 2.9, Seite 79].

Weil ferner $G(z) \neq 0$ ist in D, gibt es dann ein $c \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass gilt:

$$G(z) = \frac{\exp\big(F(z)\big)}{f(z)} = \exp(c)$$

und somit $$f(z) = \exp\left(F(z) - c\right) \text{ für alle } z \in D.$$

Also besitzt die Funktion h definiert durch $h(z) := F(z) - c$ die gewünschte Eigenschaft.□

Satz 1.5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph in $D \setminus \{z_0\}$. Der Punkt z_0 ist eine hebbare Singularität von f, das heißt f ist holomorph fortsetzbar in $D \cup \{z_0\}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset D$ von z_0 gibt, in der f beschränkt ist.

Satz 1.6 (Cauchysche Integralformel für Kreise).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D und $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ mit $z_0 \in D$ und $r > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \text{ für alle } z \in U_r(z_0).$$

Bemerkung 1.7.
Mittels vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass eine in $D \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist in D mit der n-ten Ableitung

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \text{ für jedes } z \in U_r(z_0) \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 1.8 (Maximumprinzip).
Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.

Dann besitzt $|f|$ in D kein lokales Maximum.

$|f|$ besitzt in jedem Kompaktum $K \subset D$ ein Maximum, welches stets auf dem Rand ∂K angenommen wird.

Satz 1.9 (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes nichtkonstante komplexe Polynom n-ten Grades besitzt genau n Nullstellen inklusive Vielfachheiten.

Satz 1.5 vgl. [RS01, Kapitel 10: Satz 10.1.1, Seite 272].
Satz 1.6 vgl. [FB06, Kapitel 2: Theorem 3.2, Seite 87].
Bemerkung 1.7 vgl. [FB06, Kapitel 2: Theorem 3.4, Seite 90].
Satz 1.8 vgl. [FB06, Kapitel 3: Folgerung 3.5 und Zusatz 3.5 b, Seite 124-125].
Satz 1.9 vgl. [RS01, Kapitel 9: Satz 9.1.1 und Satz 9.1.2, Seite 235-236].

2 Die Blochsche Schranke

Wir wollen uns nun den Satz von Bloch erarbeiten, welcher Aussagen über die Größe des Bildbereiches nicht konstanter und holomorpher Funktionen erlaubt. Erstaunlich ist hierbei, dass eine universelle Aussage über die Größe des Bildbereiches getroffen werden kann.

Unter der Voraussetzung, dass die Ableitung im Mittelpunkt mindestens Eins ist, zeigte Hurwitz (1904) als erster, dass eine Scheibe vom Radius $\frac{1}{58}$ im Bildgebiet liegen muss. Carathéodory verbesserte diese Schranke (1907) auf $\frac{1}{12}$, die wiederum von Bloch (1924) auf $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ verfeinert wurde. Wir wollen uns zunächst mit einer weniger scharfen Variante des Blochschen Satzes zufrieden geben und im Nachhinein den Satz von Ahlfors (1938) aufarbeiten. Dieser liefert uns dann schließlich die bislang größte und somit beste Schranke, die nachgewiesen werden konnte.[5]

Es sollen nun die für den Beweis des Blochschen Satzes erforderlichen Hilfssätze erarbeitet werden.

2.1 Definitionen und Hilfssätze

Definition 2.1.
*Gegeben sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathbb{E}_R \subset D$ und eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann heißt die Zahl $M(r) := \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ das **Betragsmaximum** von f auf der Kreislinie $|z| = r$ für $0 \leq r < R$.*

Lemma 2.2 (Cauchysche Ungleichung).
Es sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$.

Dann gilt

$$|a_k| \leq M(r) r^{-k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 0 < r < R.$$

Beweis. Die Entwicklungskoeffizienten a_k sind die Taylorkoeffizienten, die uns bereits aus der reellen Analysis bekannt sind. Mit der Cauchyschen Integralformel 1.6 und der Standardabschätzung für Integrale folgt dann für alle $0 < r < R$:

$$|a_k| = \left| \frac{f^k(0)}{k!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^{k+1} e^{it(k+1)}} ire^{it} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^{k+1}} r dt = \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{k+1}} 2\pi r = M(r) r^{-k}.$$

□

[5] Vgl. [RS06, Seite 223 ff.].
Lemma 2.2 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Lemma 1.1].

Satz 2.3 (Parsevalsche Gleichung).
Es sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi \quad \textit{für } 0 \leq r < R.$$

Insbesondere ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq \big(M(r)\big)^2 \quad \textit{für } 0 \leq r < R.$$

Beweis. Da eine Potenzreihe auf ihrer Konvergenzkreisscheibe stets kompakt konvergiert, ist die folgende Grenzwertvertauschung erlaubt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} \Big|^2 d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\varphi} \Big|^2 d\varphi \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\varphi} \Big|^2 d\varphi. \qquad (2.3a)
\end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für komplex konjugierte Zahlen, der elementaren Beziehung $|z|^2 = z\overline{z}$ und der Linearitätseigenschaft des Integrals folgt, dass (2.3a)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_k \overline{a_m} r^{k+m} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\varphi} d\varphi}_{=2\pi,\ \text{für } k=m}. \qquad (2.3b)$$

Wegen der Periodizität der Exponentialfunktion verschwindet das Integral in (2.3b) für $k \neq m$. Somit gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi = 2\pi \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{a_k} r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \text{ für } 0 \leq r < R.$$

Der Zusatz ist klar, denn

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(M(r)\big)^2 d\varphi = \big(M(r)\big)^2 \text{ für } 0 \leq r < R.$$

□

Bemerkung 2.4.
Es gilt die Gleichheit $|a_k| = M(r) r^{-k}$ für $0 < r < R$ und ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ in der Cauchyschen Ungleichung 1.1 genau dann, wenn $f(z) = a_k z^k$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $M(r)$, denn $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)| = \max\limits_{|z|=r} \left| a_k z^k \right| = \max\limits_{|z|=r} |a_k| r^k = |a_k| r^k$.

Satz 2.3 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Satz 1.1].
Bemerkung 2.4 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Bemerkung zum Satz 1.1].

Korollar 2.5.
Es sei $f : \mathbb{E}_R \to \mathbb{C}$ holomorph in $\mathbb{E}_R$ mit $R > 0$. Dann gilt

$$|f(0)|^2 + \left|f'(0)\right|^2 R^2 \leq \sup_{|z|<R} |f(z)|^2 .$$

Beweis. Mit der Parsevalschen Gleichung 2.3 ergibt sich die folgende Abschätzung für $0 \leq r < R$:

$$\begin{aligned} |f(0)|^2 + \left|f'(0)\right|^2 r^2 &= |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \\ &\leq \left(M(r)\right)^2 = \max_{|z|=r} |f(z)|^2 \\ &\leq \sup_{|z|<R} |f(z)|^2 . \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der letzten Abschätzung geht aus dem Maximumprinzip 1.8 hervor. Die Behauptung folgt dann aus dem Grenzübergang von $r \to R-$. □

Unter einigen Voraussetzungen erlaubt uns das folgende Lemma bereits eine erste, von den Voraussetzungen noch stark abhängige Aussage über die Größe einer im Bildgebiet liegenden Scheibe.

Lemma 2.6.
Es sei $f : \mathbb{E}_r \to \mathbb{C}$ holomorph in $\mathbb{E}_r$ mit $f(0) = 0$, $a := |f'(0)| > 0$ und $|f'(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{E}_r$ und ein festes $M \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_\rho \subset f(\mathbb{E}_r) \text{ für } \rho := \frac{ra^2}{4M} > 0.$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass ein beliebiges γ aus $\mathbb{E}_\rho$ stets im Bild $f(\mathbb{E}_r)$ liegt. Wir führen den Beweis indirekt.

Es sei also $\gamma \notin f(\mathbb{E}_r)$, das heißt $f(z) \neq \gamma$ für alle $z \in \mathbb{E}_r$. Insbesondere ist dann auch $\gamma \neq f(0) = 0$, und somit gilt: $1 - \dfrac{f(z)}{\gamma} \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}_r$. Gemäß Korollar 1.4 zum Cauchyschen Integralsatz gibt es dann eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{E}_r \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := \log\left(1 - \dfrac{f(z)}{\gamma}\right)$ für alle $z \in \mathbb{E}_r$. Definieren wir nun die Funktion h durch

$$h(z) := \sqrt{1 - \frac{f(z)}{\gamma}} := \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{f(z)}{\gamma}\right)\right) \text{ für alle } z \in \mathbb{E}_r,$$

so ist h als Verkettung holomorpher Funktionen auch wieder holomorph in $\mathbb{E}_r$.

Der Eindeutigkeit halber legen wir noch fest, dass der $\log(1) = 0$ ist, womit jeder weitere Logarithmus eindeutig bestimmt wäre. Schließlich hat $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ wegen der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion das gleiche „Recht“ $\log(1)$ zu sein wie die Null.

Korollar 2.5 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Korollar 1.1].
Lemma 2.6 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Lemma 1.2].

Da nun $h(0) = 1$ ist, erhalten wir für die Ableitung von h in Null:

$$h'(0) = \frac{1}{2h(0)}\left(-\frac{f'(0)}{\gamma}\right) = -\frac{f'(0)}{2\gamma}. \tag{2.6a}$$

Nach der Standardabschätzung für Integrale und der Voraussetzung folgt dann:

$$\begin{aligned}
\left|h^2(z)\right| = \left|1 - \frac{f(z)}{\gamma}\right| \leq 1 + \frac{|f(z)|}{|\gamma|} &= 1 + \frac{1}{|\gamma|}\left|\int_0^z f'(\zeta)d\zeta\right| \\
&= 1 + \frac{1}{|\gamma|}\left|\int_0^1 f'(tz)z\,dt\right| \\
&\leq 1 + \frac{1}{|\gamma|}\int_0^1 \left|f'(tz)z\right|dt \\
&\leq 1 + \frac{M|z|}{|\gamma|} \leq 1 + \frac{Mr}{|\gamma|} \text{ für alle } z \in \mathbb{E}_r.
\end{aligned}$$

Es folgt dann mit Korollar 2.5 und (2.6a):

$$|h(0)|^2 + \left|h'(0)\right|^2 r^2 = 1 + \frac{|f'(0)|^2}{4|\gamma|^2} r^2 \leq \sup_{|z|<r} |h(z)|^2 \leq 1 + \frac{Mr}{|\gamma|},$$

und damit

$$\frac{|f'(0)|^2}{4|\gamma|^2} r^2 \leq \frac{Mr}{|\gamma|}. \tag{2.6b}$$

.

Durch Umformung von (2.6b) folgt schließlich:

$$|\gamma| \geq \frac{a^2 r^2}{4} \cdot \frac{1}{rM} = \frac{ra^2}{4M} > 0.$$

γ liegt also nicht in $\mathbb{E}_\rho$. □

Definition 2.7.
Für jede Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Menge aller Funktionen, die in einer offenen Umgebung von D holomorph sind.

Dank der vorbereiteten Grundlagen können wir nun den Satz von Bloch formulieren, der uns im Vergleich zu Lemma 2.6 eine wesentliche Verallgemeinerung hinsichtlich der Schranke und der Voraussetzungen erlaubt.

2.2 Satz von Bloch

Satz 2.8 (Bloch).
Es sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ mit $|f'(0)| \geq 1$. Dann gibt es ein $\eta \in \mathbb{C}$, so dass gilt

$$\boxed{U_{\frac{1}{16}}(\eta) \subset f(\mathbb{E}).}$$

Definition 2.7 vgl. [RS06, Kapitel 10: Definition zum Satz 10.1, Seite 223].
Satz 2.8 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Satz 1.2].

Beweis. Analog zur Definition 2.1 legen wir das Betragsmaximum der ersten Ableitung durch $M_1(r) := \max\limits_{|z|=r} |f'(z)|$ für $0 \leq r \leq 1$ fest. Gemäß Maximumprinzip 1.8 ist klar, dass

$$1 \leq |f'(0)| = M_1(0) \leq M_1(r) \leq M_1(1) < \infty \text{ für } 0 \leq r \leq 1.$$

Definieren wir noch $\mu(s) := sM_1(1-s)$ für $s \in [0,1]$, so ist

$$\mu(1) = 1 \cdot M_1(0) = |f'(0)| \geq 1 \text{ sowie } 0 \leq \mu(s) = sM_1(1-s) \leq sM_1(1) \to 0 \text{ für } s \to 0+.$$

Einerseits ist demnach $1 \leq \mu(1)$, andererseits konvergiert $\mu(a_n)$ gegen Null für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$. Betrachten wir nun eine solche Nullfolge gegeben durch $a_n := 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\mu(a_{k+1}) < 1 \leq \mu(a_k)$. Für $\rho := 2^{-k}$ gilt also:

$$\rho M_1(1-\rho) \geq 1, \ \frac{\rho}{2} M_1\left(1 - \frac{\rho}{2}\right) < 1 \text{ und } 0 < \rho \leq 1. \tag{2.8a}$$

Nun sei ein $\zeta \in \mathbb{E}$ gegeben mit $|\zeta| = 1 - \rho$ und $|f'(\zeta)| = M_1(1-\rho)$. Setzen wir noch $\eta := f(\zeta)$ und $g(z) := f(z+\zeta) - \eta$ dann folgt mit (2.8a) und dem Maximumprinzip 1.8:

(i) $g(0) = f(\zeta) - f(\zeta) = 0$,

(ii) $a := |g'(0)| = |f'(\zeta)| = M_1(1-\rho) \geq \frac{1}{\rho} > 0$ und

(iii) $|g'(z)| = |f'(z+\zeta)| \leq M_1(|z| + 1 - \rho) \leq M_1(1 - \frac{\rho}{2}) < \frac{2}{\rho}$ für $|z| < \frac{\rho}{2}$.

g ist natürlich auch holomorph in $\mathbb{E}_{\rho/2}$ und erfüllt somit sämtliche Voraussetzungen aus Lemma 1.2. Wir können also folgern, dass

$$\mathbb{E}_{\tilde{\rho}} \subset g\left(\mathbb{E}_{\rho/2}\right) \text{ für } \tilde{\rho} = \frac{\frac{\rho}{2} a^2}{4M_1\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)} \geq \frac{\frac{\rho}{2}\left(1/\rho\right)^2}{4\frac{2}{\rho}} = \frac{1}{16}.$$

Es sei nun $w \in U_{1/16}(\eta)$. Dann ist $\tilde{w} := w - \eta \in \mathbb{E}_{1/16} \subset g\left(\mathbb{E}_{\rho/2}\right)$, weshalb es ein $\tilde{z} \in \mathbb{E}_{\rho/2}$ gibt mit $g(\tilde{z}) = \tilde{w}$. Für $z := \tilde{z} + \zeta$ folgt:

$$|z| \leq |\tilde{z}| + |\zeta| = 1 - \rho + |\tilde{z}| < 1 - \tfrac{\rho}{2} < 1 \text{ und } f(z) = f(\tilde{z} + \zeta) = g(\tilde{z}) + \eta = \tilde{w} + \eta = w.$$

Es gibt also zu jedem $w \in U_{1/16}(\eta)$ ein $z \in \mathbb{E}$ mit $f(z) = w$. Damit ist $U_{1/16}(\eta) \subset f(\mathbb{E})$.

□

Bemerkung 2.9.

(i) Wir merken an, dass ρ aus (2.8a) umso kleiner gewählt werden kann, je größer $|f'(0)|$ ist. Somit ist auch unser $a = M_1(1-\rho)$ aus (ii) größer, woraus sich eine größeres $\tilde{\rho}$ ergibt.

(ii) Satz 2.8 liefert auch eine Aussage für $|f'(0)| = c$ mit $c > 0$ beliebig, denn mittels Normierung gilt: $U_{1/16}(\eta) \subset \frac{1}{c} f\left(\mathbb{E}\right), \eta \in \mathbb{C}$. Damit ist $c \cdot U_{1/16}(\eta) = U_{c/16}(\eta^*) \subset f\left(\mathbb{E}\right)$ mit $\eta^* := c\eta \in \mathbb{C}$.

(iii) Ist die Ableitung im Mittelpunkt einer beliebigen abgeschlossenen Eins-Umgebung ungleich Null und ist f in einer offenen Umgebung um diese holomorph, so erlaubt Satz 2.8 eine Aussage über die Bildgröße. Es sei also $U_1(z_0) \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ eine beliebige Eins-Umgebung mit $f \in \mathcal{O}\big(\overline{U_1(z_0)}\big)$ und $c := |f'(z_0)| > 0$. Dann gilt: $U_{c/16}(\eta) \subset f\big(U_1(z_0)\big)$ für ein $\eta \in \mathbb{C}$.

Aus Bemerkung 2.9 geht also hervor, dass der Blochsche Satz 2.8 für jede nichtkonstante holomorphe Funktion eine Aussage bereitstellt.

Korollar 2.10.
Es sei f holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in G$, $G \neq \mathbb{C}$ und $f'(0) \neq 0$. Dann enthält das Bild $f(G)$ Scheiben vom Radius $\frac{1}{16}d\,|f'(0)|$ mit $0 < d < d_{(0,\partial G)} := \min\{|\zeta| : \zeta \in \partial G\}$.

Ist insbesondere $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht konstant, so enthält $f(\mathbb{C})$ Scheiben von jedem Radius.

Beweis. Es gilt: $\overline{U_d(0)} \subset G$. Die Funktion g definiert durch $g(z) := \dfrac{f(dz)}{df'(0)}$ liegt somit in $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$. Wegen $g'(z) = d\dfrac{f'(dz)}{df'(0)}$ ist $g'(0) = 1$. Also gibt es nach Satz 2.8 ein $\eta \in \mathbb{C}$ mit $U_{1/16}(\eta) \subset g(\mathbb{E}) = \dfrac{f(d\mathbb{E})}{df'(0)}$. Somit ist

$$U_{\frac{1}{16}d|f'(0)|}(\eta) = df'(0)U_{1/16}(\eta) \subset f(d\mathbb{E}) = f\left(U_d(0)\right) \subset f(G).$$

Damit folgt die Behauptung und auch unmittelbar der Zusatz, wenn wir $d_{(0,\partial G)} := \infty$ setzen. □

Beispiel 2.11.
Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha z} - 1)$ für $\alpha > 1$ ist eine ganze Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Dann folgt:

(i) $\mathbb{E}_\rho \subset f(\mathbb{E})$ für $\rho = \frac{e^{-\alpha}}{4}$ gemäß Lemma 2.6, denn $M = \sup\limits_{|z|<1} |f'(z)| = \max\limits_{|z|=1} |e^{\alpha z}|$ $= \max\limits_{x \in [-1,1]} e^{\alpha x} = e^\alpha$ und $a = r = 1$.

(ii) Wegen $e^{\alpha z} \neq 0$ ist $f(z) \neq -\frac{1}{\alpha}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Somit liegt $-\frac{1}{\alpha}$ nicht im Bild $f(\mathbb{E})$, womit $\mathbb{E}_\rho \not\subset f(\mathbb{E})$ für alle $\rho > \frac{1}{\alpha}$.

(iii) Die optimale Schranke $\sup\{\rho > 0 : \mathbb{E}_\rho \subset f(\mathbb{E})\}$ liegt also in $\left[\frac{1}{4}e^{-\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right]$ und strebt gegen Null für $\alpha \to \infty$.

(iv) Nach Satz 2.8 gibt es aber immer ein $\eta \in \mathbb{C}$ mit $U_{1/16}(\eta) \subset f(\mathbb{E})$.

Diese Variante des Blochschen Satzes ist für unsere Zwecke bereits ausreichend. Motiviert von der Fragestellung, inwiefern diese Konstante noch verbessert werden kann und wo das Supremum liegt, wollen wir uns mit dem Satz von Ahlfors auseinandersetzen, welcher die Schranke des Blochschen Satzes deutlich verbessert.

Korollar 2.10 vgl. [RS06, Kapitel 10: Folgerung 1, Seite 224].
Beispiel 2.11 vgl. [Kra07, Paragraph 1: Beispiel zum Satz 1.2].

3 Die Konstante von Ahlfors

Nach Bemerkung 2.9 enthält das Bild $f(\mathbb{E})$ umso größere Scheiben, je größer $|f'(0)|$ ist. Dies motiviert die folgende Extremalaufgabe:

3.1 Extremalproblem

Extremalaufgabe 3.1.
Finde eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ mit $F(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E})$ und größtmöglicher Ableitung in 0.

Zur Präzisierung betrachten wir zu $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ die Familie

$$\mathscr{F} := \{f \circ j : j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})\} \quad \text{mit} \quad j(z) := \frac{\varepsilon z - w}{\overline{w}\varepsilon z - 1} \text{ für } \varepsilon \in \partial\mathbb{E},\ w \in \mathbb{E}. \tag{3.1a}$$

Die Abbildung j besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$j \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}),\quad j(0) = w,\quad j'(z) = \frac{\varepsilon(|w|^2 - 1)}{(\overline{w}\varepsilon z - 1)^2} \text{ und insbesondere } j'(0) = \varepsilon(|w|^2 - 1).$$

Für jedes $G := f \circ j \in \mathscr{F}$ ergibt sich demnach:

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}),\ G(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E}) \text{ und } |G'(0)| &= |f'(j(0)) \cdot j'(0)| \\ &= |f'(w)| \cdot |\varepsilon| \cdot (1 - |w|^2) = |f'(w)| \cdot 1 \cdot (1 - |w|^2). \end{aligned}$$

Wir definieren die Hilfsfunktion F_0 in Abhängigkeit von w durch

$$F_0(w) := \left|f'(w)\right|(1 - |w|^2).$$

Weil $f' \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ und somit stetig in $\overline{\mathbb{E}}$ ist, ist die Hilfsfunktion F_0 beschränkt in $\mathbb{E}$ und nimmt deshalb in einem Punkt $q \in \mathbb{E}$ ihr Maximum $N > 0$ an. Eine Lösung der Extremalaufgabe ist also die Funktion

$$F(z) := f\left(\frac{z - q}{\overline{q}z - 1}\right) \in \mathscr{F} \text{ mit} \tag{3.1b}$$

$$F_0(q) = \max_{|w| \le 1} \left|f'(w)\right|(1 - |w|^2) = N = \left|F'(0)\right|.$$

Zusatz 3.2.
Für die in (3.1b) definierte Funktion F lässt sich folgende Abschätzung herleiten:

$$\left|F'(z)\right| \le \frac{N}{1 - |z|^2} \text{ für alle } z \in \mathbb{E}, \text{ speziell:}$$

$$\max_{|z| \le r} \left|F'(z)\right| \le \frac{N}{1 - r^2} \text{ für } 0 < r < 1.$$

Beweis. Die in (3.1a) definierte Familie $\mathscr{F}$ lässt sich wegen der Gruppen-Eigenschaft auch wie folgt schreiben:

$$\mathscr{F} = \{F \circ j : j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})\}.$$

Extremalaufgabe 3.1 und Zusatz 3.2 vgl. [RS06, Kapitel 10: Verbesserung der Schranke durch Lösen eines Extremalproblems* 10.1.3, Seite 226-227].

Da F in $\mathscr{F}$ die betragsmäßig größte Ableitung im Nullpunkt besitzt, gilt für jede Funktion $F \circ j \in \mathscr{F}$, dass $\left|(F \circ j)'(0)\right| = |F'(w)|\,(1-|w|^2) \leq N$ für alle $w \in \mathbb{E}$ ist. Damit ist

$$\left|F'(w)\right| \leq \frac{N}{1-|w|^2} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E}.$$

□

Nun erarbeiten wir uns neben dieser Extremalaufgabe noch einige weitere Hilfssätze, mithilfe derer wir den darauf folgenden Satz von Ahlfors beweisen wollen.

3.2 Definitionen und Hilfssätze

Lemma 3.3.
Es sei $h \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $h'(0) = 1$ und $|h'(z)| \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Dann gilt

$$h''(0) = 0.$$

Beweis. Jede Stammfunktion von $h'(z)$ lässt sich in $\mathbb{E}$ um Null in eine Potenzreihe entwickeln. Somit folgt:

$$\text{(i)} \qquad \int_0^z h'(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \text{ mit } a_1 = 1.$$

Das folgende Integral soll ebenfalls in eine Reihendarstellung überführt werden. Die geometrische Reihe konvergiert kompakt auf $(-1,1)$, weshalb die folgende Grenzwertvertauschung auf jedem kompakten Intervall $[0,r]$ für ein festes $r \in (0,1)$ erlaubt ist:

$$\text{(ii)} \qquad \int_0^r \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} r^{2n+1}.$$

Mit der Polarkoordinatendarstellung $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{E}$, der Voraussetzung und der Standardabschätzung für Integrale erhalten wir durch Substitution:

$$\text{(iii)} \qquad \left|\int_0^z h'(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_0^r h'(te^{i\varphi})e^{i\varphi}dt\right| \leq \int_0^r \left|h'(te^{i\varphi})\right|\left|e^{i\varphi}\right| dt \leq \int_0^r \frac{1}{1-t^2}dt.$$

Mit (i)-(iii) ergibt sich die folgende Ungleichung für alle $z \in \mathbb{E}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}|z|^{2n+1}. \tag{3.3a}$$

Wir setzen $f(z) := \sum\limits_{k=3}^{\infty} a_k z^{k-3}$ und $g(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}|z|^{2n-2}$, womit (3.3a) umformuliert werden kann zu

$$\left|z + a_2 z^2 + z^3 f(z)\right| \leq |z| + |z|^3\,|g(z)| \text{ für alle } z \in \mathbb{E}. \tag{3.3b}$$

Lemma 3.3 vgl. [RS06, Kapitel 10: Lemma 10.7 Teil c, Seite 229].

Da $a_2 \in \mathbb{C}$ ist, gibt es ein $r' \geq 0$ und ein $\varphi' \in \mathbb{R}$, so dass $a_2 = r'e^{i\varphi'}$ ist. Die Ungleichung (3.3b) gilt für alle $z \in \mathbb{E}$, und somit insbesondere auch für $z = re^{-i\varphi'}$ mit $0 < r < 1$. Damit lässt sich (3.3b) umformulieren zu:

$$\left|1 + a_2 z + z^2 f(z)\right| \leq 1 + |z|^2\,|g(z)| \text{ resp.}$$

$$\left|1 + r'r + r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| \leq 1 + r^2\,|g(z)|\,. \tag{3.3c}$$

Des Weiteren sei $|f(z)| < M$ und $|g(z)| < M$ für $|z| < \frac{1}{2}$ und $M \in (0, \infty)$. Sei ferner $\varepsilon \in (0,2)$ und setzen wir $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$, dann gilt für $0 < r < \delta$:

$$\left|1 + r'r + r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| \geq 1 + r'r - r\varepsilon$$

aufgrund folgender Überlegung:

(i) $\left|r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| = r^2\,|f(z)| \leq r^2 M < r^2\,\dfrac{\varepsilon}{r} = r\varepsilon$, weil $r < \frac{\varepsilon}{M}$.

(ii)
$$\begin{aligned} 1 + r'r = |1 + r'r| &= \left|1 + r'r + r^2 e^{-2i\varphi'} f(z) - r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| \\ &\leq \left|1 + r'r + r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| + \left|r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| \\ &\underset{\text{(i)}}{\leq} \left|1 + r'r + r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| + r\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit (3.3c) folgt dann für $0 < r < \delta$:

$$1 + r'r - r\varepsilon \leq \left|1 + r'r + r^2 e^{-2i\varphi'} f(z)\right| < 1 + r^2 M,$$

und somit

$$r' - \varepsilon < rM.$$

Da $r \in (0, \delta)$ beliebig, folgt $r' - \varepsilon \leq 0$. Es gilt also $r' \leq \varepsilon$ mit $\varepsilon \in (0,2)$ beliebig, womit $r' = 0$ impliziert wird. Weil damit $a_2 = r'e^{i\varphi'} = 0$, folgt: $h''(0) = 2a_2 = 0$. $\square$

Lemma 3.4.
Für $F \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ gelte $|F'(z)| \leq \dfrac{1}{1 - |z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $F'(0) = 1$. Dann gilt

$$\operatorname{Re} F'(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{\left(1 - 3^{-1/2}|z|\right)^3} \geq 0 \;\; \textit{für alle } z \textit{ mit } |z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{3.4a}$$

Beweis. Es sei $F \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ eine Funktion, welche die genannten Voraussetzungen erfüllt. Dann werden diese auch von $F_\varphi(z) := e^{-i\varphi} F(e^{i\varphi} z)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ erfüllt, denn die Ableitungen $F'_\varphi(z)$ und $F'(z)$ stimmen in Null überein. Lässt sich die Abschätzung (3.4a) nun für F_φ mit $z = r$ beweisen, so gilt diese auch für F mit $z = re^{i\varphi}$. Es genügt also, die Abschätzung (3.4a) für $z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ zu zeigen.

Zunächst definieren wir die Hilfsfunktionen p und q durch

$$z := p(w) := \sqrt{3}\frac{1 - w}{3 - w} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}) \qquad \text{und} \qquad q(w) := \frac{9}{4} w \left(1 - \frac{1}{3} w\right)^2 \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}).$$

Lemma 3.4 vgl. [RS06, Kapitel 10: Lemma 10.7, Seite 229].

Für p und q gilt:

(i) $p(\overline{\mathbb{E}}) \subset \mathbb{E}$

(ii) $p([0,1]) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

(iii) $q\big(p^{-1}(z)\big) = \dfrac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^3}$

(iv) $|q(w)|\left(1-|p(w)|^2\right) = 1$ für $w \in \partial\mathbb{E}$

Obgleich der Nachweis Rechenroutine ist, wollen wir die Aussagen (i) und (iv) zeigen:

Zu (i): Das Bild $p(\overline{\mathbb{E}})$ liegt in $\mathbb{E}$, wenn $|p(w)| < 1$ für alle $w \in \overline{\mathbb{E}}$. Nach dem Maximumprinzip 1.8 nimmt $|p(w)|$ sein Maximum auf dem Rand $\partial\mathbb{E}$ an, womit für alle $w \in \partial\mathbb{E}$ zu zeigen bleibt:

$$|p(w)| = \sqrt{3}\left|\frac{1-w}{3-w}\right| < 1. \tag{3.4b}$$

(3.4b) ist äquivalent mit jeder der folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} 3|1-w|^2 &< |3-w|^2, \\ 3\big(1-\operatorname{Re} w\big)^2 + 3(\operatorname{Im} w)^2 &< \big(3-\operatorname{Re} w\big)^2 + (\operatorname{Im} w)^2, \\ 6 &< 10 \text{ für alle } w \in \partial\mathbb{E}. \end{aligned}$$

Zu (iv): Für alle $w \in \partial\mathbb{E}$ gilt:

$$\begin{aligned} |q(w)|\left(1-|p(w)|^2\right) &= \frac{1}{4}|w|\,|3-w|^2\left(1-3\frac{|1-w|^2}{|3-w|^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\,|3-w|^2 - \frac{3}{4}\,|1-w|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\big(3-\operatorname{Re} w\big)^2 + (\operatorname{Im} w)^2\right) - \frac{3}{4}\left(\big(1-\operatorname{Re} w\big)^2 + (\operatorname{Im} w)^2\right) = 1. \end{aligned}$$

Wir definieren noch eine letzte Hilfsfunktion, die sich aus den Funktionen p, q und F wie folgt zusammensetzt:

$$G(w) := \left(\frac{F'\big(p(w)\big)}{q(w)} - 1\right)\frac{w}{(1-w)^2}. \tag{3.4c}$$

G ist holomorph in $\overline{\mathbb{E}} \setminus \{1\}$, weil F, q und p dort holomorph sind und $\dfrac{w}{q(w)}$ keinen Pol in Null besitzt. G hat nun dem ersten Anschein nach einen Pol in $w_0 = 1$. Wir werden aber zeigen, dass es eine punktierte Umgebung um Eins gibt, in der G beschränkt ist. Gemäß dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.5 ist w_0 dann eine hebbare Singularität, das heißt G lässt sich auf ganz $\overline{\mathbb{E}}$ holomorph fortsetzen.

Neben der Voraussetzung $F'(0) = 1$ ist nach Lemma 3.3 auch $F''(0) = 0$, weshalb die Potenzreihenentwicklung von F' in $\mathbb{E}$ um den Nullpunkt die folgende Gestalt hat:

$$F'(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k.$$

Wegen $p(1) = 0$ gibt es dann eine Umgebung $U_\varepsilon(1)$ mit $\varepsilon > 0$ genügend klein, so dass für alle $w \in U_\varepsilon(1)$ gilt:

$$F'\big(p(w)\big) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \big(p(w)\big)^k.$$

Nun erfüllt p die folgende Gleichung für alle $w \in U_\varepsilon(1)$:

$$(1-w)^2 = \frac{1}{3} p\,(w)^2\,(3-w)^2\,.$$

Diese Überlegung erlaubt uns G wie folgt umzuformulieren:

$$\begin{aligned}
G(w) &= \frac{1 - q(w) + a_2 p(w)^2 + a_3 p(w)^3 + \dots}{\frac{9}{4} w \left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2} \cdot \frac{w}{(1-w)^2} \\
&= \frac{1 - \frac{9}{4} w \left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 + a_2 p(w)^2 + a_3 p(w)^3 + \dots}{\frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 (1-w)^2} \\
&= \frac{1 - \frac{9}{4} w \left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2}{\frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 (1-w)^2} + \frac{a_2 p(w)^2 + a_3 p(w)^3 + \dots}{\frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 (1-w)^2} \\
&= \frac{\frac{4-w}{4}(1-w)^2}{\frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 (1-w)^2} + \frac{a_2 p(w)^2 + a_3 p(w)^3 + \dots}{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 p(w)^2\,(3-w)^2} \\
&= \frac{4-w}{9\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2} + \frac{a_2 + a_3 p(w) + \dots}{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3}w\right)^2 (3-w)^2}.
\end{aligned}$$

G ist also in $w_0 = 1$ definiert und deshalb beschränkt in $U_\varepsilon(1)$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.5 ist $w_0 = 1$ somit eine hebbare Singularität und damit $G \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$.

Ferner gilt für alle $w \in \partial\mathbb{E} \setminus \{1\}$: $\dfrac{w}{(1-w)^2}$ ist reellwertig und negativ, denn
$\dfrac{(1-e^{i\varphi})^2}{e^{i\varphi}} = \left(1 - 2e^{i\varphi} + e^{2i\varphi}\right) e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi} = -2 + 2\cos\varphi < 0$ für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Der Realteil von G ist somit gegeben durch:

$$\operatorname{Re} G(w) = \frac{w}{(1-w)^2} \operatorname{Re}\left(\frac{F'\big(p(w)\big)}{q(w)} - 1\right) \quad \text{für alle } w \in \partial\mathbb{E}.$$

Des Weiteren folgt mit (i), (iv) und der Voraussetzung für alle $w \in \partial\mathbb{E}$:

$$\left|F'\big(p(w)\big)\right| (1 - |p(w)|^2) \le 1 = |q(w)| \left(1 - |p(w)|^2\right),$$

$$\text{also} \quad \Bigg|\underbrace{\frac{F'\big(p(w)\big)}{q(w)}}_{:=h(w)}\Bigg| \le 1,$$

$$\text{und somit} \quad \operatorname{Re} h(w) \le \sqrt{\big(\operatorname{Re} h(w)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} h(w)\big)^2} \le 1 \text{ für alle } w \in \partial\mathbb{E}.$$

$$\text{Schließlich folgt:} \quad \operatorname{Re} G(w) = \underbrace{\frac{w}{(1-w)^2}}_{<0} \underbrace{\big(\operatorname{Re} h(w) - 1\big)}_{\le 0} \ge 0 \text{ für alle } w \in \partial\mathbb{E}. \tag{3.4d}$$

Mithilfe des Maximumprinzips 1.8 wollen wir nun zeigen, dass $\operatorname{Re} G(w) \ge 0$ auf ganz $\overline{\mathbb{E}}$ gilt. Dazu betrachten wir $e^{-G(w)} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$. Es gilt:

$$\operatorname{Re} G(w) \ge 0 \text{ genau dann, wenn } \left|e^{-G(w)}\right| = e^{-\operatorname{Re} G(w)} \le 1. \tag{3.4e}$$

Gemäß dem Maximumprinzip 1.8 wird das Maximum von $\left|e^{-G(w)}\right|$ in $\overline{\mathbb{E}}$ auf dem Rand $\partial\mathbb{E}$ angenommen. Dort gilt nach (3.4d) $\left|e^{-G(w)}\right| \leq 1$ für alle $w \in \partial\mathbb{E}$. Also ist $\left|e^{-G(w)}\right| \leq 1$ in ganz $\overline{\mathbb{E}}$, womit nach (3.4e) $\operatorname{Re} G(w) \geq 0$ in ganz $\overline{\mathbb{E}}$ ist.

Ferner ist $\dfrac{w}{(1-w)^2} \geq 0$ für alle $w \in [0,1)$. Dann folgt:

$$\operatorname{Re} G(w) = \operatorname{Re}\left(\frac{F'\big(p(w)\big)}{q(w)} - 1\right)\underbrace{\frac{w}{(1-w)^2}}_{\geq 0} \geq 0,$$

und damit
$$\operatorname{Re}\left(\frac{F'\big(p(w)\big)}{q(w)}\right) \geq 1 \text{ für alle } w \in [0,1).$$

Wegen $F'\big(p(1)\big) = F'(0) = 1$ und $q(1) = 1$ gilt die letzte Ungleichung auch für $w_0 = 1$.

Also folgt:
$$\operatorname{Re} F'\big(p(w)\big) \geq q(w) \text{ für alle } w \in [0,1].$$

Schließlich ergibt sich mit (ii) und $q \circ p^{-1}$ aus (iii) für alle $z = p(w) \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$:

$$\operatorname{Re} F'(z) \geq q\big(p^{-1}(z)\big) = \frac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^3} \geq 0.$$

□

Lemma 3.5.
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, und sei $h \in \mathcal{O}(G)$ mit $\operatorname{Re} h'(z) > 0$ für alle $z \in G$. Dann wird G durch h biholomorph auf $h(G)$ abgebildet.

Beweis. Weil $h \in \mathcal{O}(G)$ ist, bleibt nur die Bijektivität von h zu zeigen, wobei $h : G \to h(G)$ natürlich surjektiv ist. Die Injektivität bestätigen wir, indem wir für alle $u, v \in G$ mit $u \neq v$ zeigen, dass $h(u) \neq h(v)$ ist.

Aufgrund der Konvexität von G liegt die Verbindungsstrecke von u nach v vollständig in G, das heißt $\gamma(t) = u + (v-u)t \in G$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $u, v \in G$. Also folgt für $u, v \in G$ mit $\gamma(0) := u \neq v =: \gamma(1)$:

$$\begin{aligned}\frac{h(v)-h(u)}{v-u} &= \frac{h(\gamma(1))-h(\gamma(0))}{v-u} = \left[\frac{h(\gamma(t))}{v-u}\right]_0^1 = \int_0^1 h'(\gamma(t))dt \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} h'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} h'(\gamma(t))dt \neq 0, \text{ wegen } \operatorname{Re} h'(z) > 0 \text{ für alle } z \in G.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.6.
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ beschränkt, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig mit $f|_G : G \to \mathbb{C}$ offen und es sei $a \in G$ ein Punkt, so dass $s := \min\limits_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| > 0$.

Dann enthält $f(G)$ die Scheibe $U_s\big(f(a)\big)$.

Lemma 3.5 vgl. [RS06, Kapitel 10: Lemma 10.7 Teil a, Seite 228].
Lemma 3.6 vgl. [RS06, Kapitel 10: Satz 10.2, Seite 224].

Beweis. Da $\partial f(G)$ kompakt ist, gibt es ein $w_* \in \partial f(G)$ mit

$$d\big(\partial f(G), f(a)\big) := \min\{|w - f(a)| : w \in \partial f(G)\} = |w_* - f(a)|.$$

Da $\overline{G}$ kompakt, gibt es eine Folge $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset G$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = w_*$ und $z_* := \lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu \in \overline{G}$. Es folgt $f(z_*) = w_* \in \partial f(G)$. Nun ist aber $f|_G$ offen, womit z_* nicht zu G gehören kann. Also gilt $z_* \in \partial G$ und mithin $|w_* - f(a)| \geq s > 0$. Es folgt $U_s\big(f(a)\big) \subset f(G)$. $\square$

Definition 3.7.
Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G, dann heißt eine Scheibe $B \subset f(G)$ ***schlicht*** *bezüglich f, falls es ein Gebiet $G^* \subset G$ gibt, das durch f biholomorph auf B abgebildet wird.*

3.3 Satz von Ahlfors

Satz 3.8 (Ahlfors). *Es sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ und $N := \max\limits_{|z|\leq 1} |f'(z)| \cdot (1 - |z|^2) > 0$.*

Dann enthält $f(\mathbb{E})$ schlichte Scheiben vom Radius $\dfrac{\sqrt{3}N}{4}$.

Beweis. Mittels Normierung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N = 1$ annehmen und wählen F gemäß der Lösung zur Extremalaufgabe (3.1b). Es gilt also: $|F'(0)| = N = 1$ und somit $F'(0) = \eta$ für ein $\eta \in \partial\mathbb{E}$.

Sei zunächst $\eta = 1$:

Weil nun $F \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, $F'(0) = 1$ und nach Zusatz 3.2 $|F'(z)| \leq \dfrac{1}{1 - |z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{E}$, folgt gemäß Lemma 3.4: $\operatorname{Re} F'(z) > 0$ für alle $z \in U := \mathbb{E}_{1/\sqrt{3}}$. Da zudem U konvex ist, folgt nach Lemma 3.5, dass die Abbildung $F : U \to F(U)$ biholomorph ist.

Für alle $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|F\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}\right) - F(0)\right| &= \left|\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} F'\left(te^{i\varphi}\right) dt\right| = \sqrt{\left(\operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} F'\left(te^{i\varphi}\right) dt\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} F'\left(te^{i\varphi}\right) dt\right)^2} \\
&\geq \sqrt{\left(\operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} F'\left(te^{i\varphi}\right) dt\right)^2} = \operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} F'\left(te^{i\varphi}\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \operatorname{Re} F'\left(te^{i\varphi}\right) dt \underset{\text{Lemma 3.4}}{\geq} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1 - \sqrt{3}t}{\left(1 - 3^{-1/2}t\right)^3} dt = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Definition 3.7 vgl. [RS06, Kapitel 10: Satz von Ahlfors* 10.1.4, Seite 228].
Satz 3.8 vgl. [RS06, Kapitel 10: Ahlfors 10.6, Seite 228].

Nach Lemma 3.6 enthält $F(U)$ also Scheiben vom Radius $r = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Erinnern wir uns, dass F die zusammengesetzte Funktion $F = f \circ g$ mit der Abbildung $g(z) := \dfrac{z-q}{\overline{q}z-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ gemäß Extremalaufgabe 3.1 ist. Aufgrund der Eigenschaft $g = g^{-1}$ erhalten wir somit: $f = F \circ g$.

Es gilt die folgende Abbildungsvorschrift:

$$\mathbb{E} \supset G^* := g^{-1}(U) \xrightarrow{\quad g \quad} U \xrightarrow{\quad F \quad} G := F(U).$$

Da die Verkettung zweier biholomorpher Funktionen wieder biholomorph ist, wird G^* durch f biholomorph auf G abgebildet. Mit Definition 3.7 enthält G dann schlichte Scheiben $B \subset G$ bezüglich f vom Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Für ein beliebiges $\eta \in \partial\mathbb{E}$ arbeiten wir mit $\eta^{-1}F$. Dann ist $f : G^* \to \eta G$ biholomorph und ηG enthält schlichte Scheiben vom Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$. □

Korollar 3.9.
Es sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ mit $|f'(0)| \geq 1$.

Dann enthält $f(\mathbb{E})$ schlichte Scheiben vom Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Beweis. $N = \max\limits_{|z|\leq 1} |f'(z)| \cdot (1 - |z|^2) \geq |f'(0)| \cdot (1-0) \geq 1$. Gemäß Satz 3.8 enthält dann $f(\mathbb{E})$ Scheiben vom Radius $\frac{\sqrt{3}N}{4} \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$. □

Bemerkung 3.10.
Landau hielt den Satz von Bloch und seine Variationen für derart bedeutsam, dass er sich zur Einführung von „Weltkonstanten“ bewogen fühlte.

Für jedes $h \in \mathscr{F} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}) : f'(0) = 1 \right\}$ bezeichne L_h den Radius der größten Scheibe und B_h den Radius der größten schlichten Scheibe in $h(\mathbb{E})$.

Dann heißt

$$L := \inf \{L_h : h \in \mathscr{F}\} \text{ bzw. } B := \inf \{B_h : h \in \mathscr{F}\}$$

die Landausche bzw. Blochsche Konstante.

Damit ist $B \leq L$ trivial. Bekannte Schranken für B und L sind:

$$0,433 + 10^{-14} < \text{ B } < 0,472 \text{ und } 0,5 < \text{ L } < 0,544.$$

Vermutung von Ahlfors/Grunsky (1936):

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 0,4719.$$

Bemerkung 3.10 vgl. [RS06, Kapitel 10: Landaus Weltkonstanten* 10.1.5, Seite 230].

4 Der kleine Satz von Picard

4.1 Lemma von Landau

Lemma 4.1 (Landau, 1916).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in D$, und es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D mit $f(z) \neq 0$ und $f(z) \neq 1$ für alle $z \in D$. Dann gibt es eine in D holomorphe Funktion $g(z)$ mit

$$f(z) = \exp\left(\pi i\Big[1 + \cosh\big(2g(z)\big)\Big]\right) \text{ für alle } z \in D, \text{ und mit} \tag{4.1a}$$

$U_1(\eta) \not\subset g(D)$ für alle $\eta \in \mathbb{C}$, das heißt es gibt keine Eins-Umgebung im Bildgebiet $g(D)$.

Bemerkung 4.2.
Damit ist $g(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Arcosh}\left(\frac{\log f(z)}{\pi i} - 1\right)$ holomorph in D.

Beweis. Wir benötigen die hyperbolischen Funktionen

$$\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \text{ und } \sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{4.1b}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ lassen sich leicht die folgenden Beziehungen herleiten:

- $\sinh^2 z = \cosh^2 z - 1$ • $\cosh' z = \sinh z$ (4.1c)
- $\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z$ • $\sinh' z = \cosh z$ (4.1d)

(i) Wir definieren die Funktion h durch $h(z) := \frac{\log f(z)}{2\pi i}$ für alle $z \in D$.

Wir legen den $\log f(0)$ als Hauptwert fest, womit jeder weitere Logarithmus $\log f(z)$ mit $z \in D$ eindeutig bestimmt wäre. Nach Voraussetzung ist f holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet D und nimmt für keinen Wert aus D die Null an. Somit ist h nach Korollar 1.4 zum Cauchyschen Integralsatz holomorph in D.

Mit der Hilfsfunktion h lässt sich f durch $f(z) = \exp\big(2\pi i h(z)\big)$ für alle $z \in D$ ausdrücken und ist nach Voraussetzung ungleich Eins in D. Wegen der $2\pi i$-Periodizität der Exponentialfunktion ist damit $h(z) \notin \mathbb{Z}$, und somit ist insbesondere auch $h(z) \neq 0$ und $h(z) \neq 1$ für alle $z \in D$.

(ii) Des Weiteren seien

$$u(z) := \sqrt{h(z)} := \exp\left(\frac{1}{2}\log h(z)\right) \text{ und}$$

$$v(z) := \sqrt{h(z) - 1} := \exp\left(\frac{1}{2}\log\big(h(z) - 1\big)\right) \text{ für alle } z \in D.$$

Auch hier legen wir der Eindeutigkeit halber $\log h(0)$ und $\log\big(h(0) - 1\big)$ als Hauptwerte fest. u und v sind als Verkettungen holomorpher Funktionen ebenfalls wieder holomorph in D.

Lemma 4.1 vgl. [Kra07, Paragraph 2: Lemma 2.1].
Bemerkung 4.2 vgl. [Kra07, Paragraph 2: Bemerkung zum Lemma 2.1].

(iii) Außerdem sei $g(z) := \log\big(u(z)+v(z)\big)$ für alle $z \in D$ definiert mit Hautwert für $\log\big(u(0)+v(0)\big)$. Nach Korollar 1.4 zum Cauchyschen Integralsatz ist auch g holomorph in D, denn es gilt:

$$\begin{aligned} & u^2(z)-v^2(z) = \big(u(z)+v(z)\big)\big(u(z)-v(z)\big) = 1 \\ \text{und somit}\quad & u(z)+v(z) = \frac{1}{u(z)-v(z)} \neq 0 \text{ für alle } z \in D. \end{aligned}$$

Mit (4.1b)-(4.1d) und (i)-(iii) folgt:

$$\begin{aligned} \exp\Big(\pi i\Big[1+\cosh\big(2g(z)\big)\Big]\Big) &\underset{4.1\mathrm{d}}{=} \exp\Big(\pi i\Big[1+\cosh^2 g(z)+\sinh^2 g(z)\Big]\Big) \\ &\underset{4.1\mathrm{c}}{=} \exp\Big(2\pi i\cosh^2 g(z)\Big) \\ &\underset{4.1\mathrm{b}}{=} \exp\left(\frac{\pi i}{2}\left(e^{g(z)}+e^{-g(z)}\right)^2\right) \\ &\underset{\mathrm{(iii)}}{=} \exp\left(\frac{\pi i}{2}\left(u(z)+v(z)+\frac{1}{u(z)+v(z)}\right)^2\right) \\ &\underset{\mathrm{(iii)}}{=} \exp\left(\frac{\pi i}{2}\Big(u(z)+v(z)+u(z)-v(z)\Big)^2\right) \\ &= \exp\Big(2\pi i u^2(z)\Big) \underset{\mathrm{(ii)}}{=} \exp\Big(2\pi i h(z)\Big) \\ &\underset{\mathrm{(i)}}{=} f(z), \end{aligned}$$

und damit gilt (4.1a).

Um nachzuweisen, dass eine Eins-Umgebung um einen beliebigen Punkt aus $\mathbb{C}$ nie vollständig im Bild $g(D)$ liegt, machen wir uns zunächst noch einmal klar, dass

$$h(z) = u^2(z) = v^2(z)+1 \notin \mathbb{Z} \text{ für alle } z \in D, \text{ weshalb}$$

$$u(z) \neq i^n\sqrt{m} \text{ und } v(z) \neq \pm i^n\sqrt{m-1} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \text{ und } z \in D.$$

Da zudem die Beziehung $u(z)+v(z) = \dfrac{1}{u(z)-v(z)} \neq 0$ für alle $z \in D$ gilt, nimmt g weder

$\log\big(i^n\sqrt{m}+i^n\sqrt{m-1}\big)$ noch $-\log\big(i^n\sqrt{m}-\big(-i^n\sqrt{m-1}\big)\big)$ für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$ an.

Das heißt

$$\begin{aligned} & g(z) \neq \log\big(i^n\sqrt{m}+i^n\sqrt{m-1}\big) = \log\left(i^n\right)+\log\Big(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\Big) \\ & \qquad = i\frac{n\pi}{2}+\log\Big(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\Big), \\ \text{und}\quad & g(z) \neq -\log\big(i^n\sqrt{m}-\big(-i^n\sqrt{m-1}\big)\big) = -\Big(\log\left(i^n\right)+\log\Big(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\Big)\Big) \\ & \qquad = -\Big(i\frac{n\pi}{2}+\log\Big(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\Big)\Big) \text{ für alle} \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ und $z \in D$.

Für alle $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ und $z \in D$ gilt also: $g(z) \neq \pm\Big[\log\Big(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\Big)+i\dfrac{n\pi}{2}\Big]$.

Wir definieren nun eine Folge $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ durch $\alpha_m := \log\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)$. Wegen der Monotonie des reellen Logarithmus gilt: $0=\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_m\to\infty$.

Unter Verwendung von $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)=1$ für alle $m\in\mathbb{N}$, der trivialen Abschätzung $\sqrt{m+1}\le\sqrt{2m}$ für alle $m\in\mathbb{N}$ und der Monotonie des reellen Logarithmus ist die folgende Abschätzung erlaubt:

$$\begin{aligned}
0<\alpha_{m+1}-\alpha_m &= \log\left(\frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}\right)\\
&= \log\Big(\left(\sqrt{m+1}+\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\Big)\\
&= \log\left(\sqrt{m+1}+\sqrt{m}\right)+\log\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\\
&\le \log\left(\left(\sqrt{2m}+\sqrt{m}\right)+\sqrt{2(m-1)}+\sqrt{m-1}\right)+\log\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\\
&= \log\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)+\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)\right)+\log\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\\
&= \log\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\right)\\
&\le \log\left(\sqrt{2}+1\right)=0.8813...<1 \text{ für alle } m\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Der Abstand zweier benachbarter Folgenglieder von α ist somit stets echt kleiner Eins.

Folglich gibt es für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ ein $m\in\mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|\alpha-\alpha_m|<\frac{1}{2} \text{ oder } |\alpha-(-\alpha_m)|<\frac{1}{2}.$$

Darüber hinaus gibt es auch zu jedem $\beta\in\mathbb{R}$ ein $n\in\mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$\left|\beta-n\frac{\pi}{2}\right|\le\frac{\pi}{4}.$$

Also gibt es zu jedem $\eta=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ einen Gitterpunkt $w\in\mathbb{C}$ mit $g(z)\neq w$ für alle $z\in D$ und einem quadratischen Abstand von $|w-\eta|^2<\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{16}=\frac{4+\pi^2}{16}<1$.

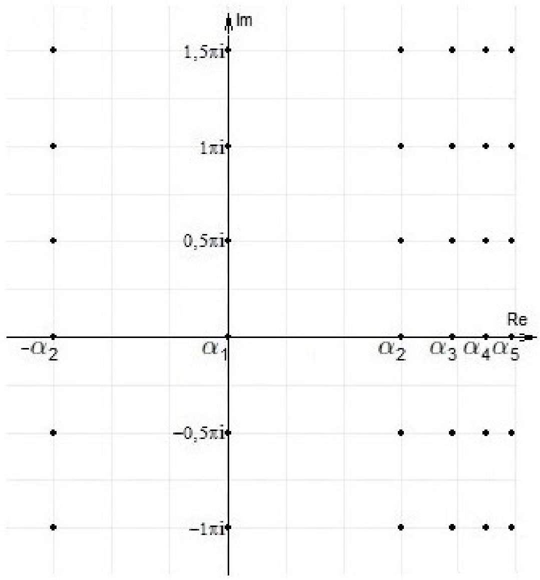

Abb. 1: Gitter der ausgelassenen Punkte in $\mathbb{C}$.

Für jedes $\eta\in\mathbb{C}$ liegt somit $U_1(\eta)$ nicht im Bild $g(D)$. □

Zusatz 4.3.
Gemäß Bemerkung 4.2 hängt $g(0)$ von $a_0:=f(0)$ und $g'(0)$ von a_0 sowie $a_1:=f'(0)$ ab. Es gilt:

a) $g(0)=\psi_0(a_0):=\log\left(\sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}}+\sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}-1}\right)$ als Hauptwert mit $\sinh\left[2\psi_0(a_0)\right]\neq 0$.

b) $g'(0)=\psi_1(a_0,a_1):=a_1\left(2\pi i a_0\sinh\left(2\psi_0(a_0)\right)\right)^{-1}$.

Zusatz 4.3 vgl. [Kra07, Paragraph 2: Zusatz zum Lemma 2.1].

Beweis. Gemäß (i)-(iii) im Beweis zum obigen Lemma gilt:
$g(0) = \log\big(u(0)+v(0)\big) = \log\Big(\sqrt{h(0)}+\sqrt{h(0)-1}\Big)$ mit $h(0) = \dfrac{\log f(0)}{2\pi i}$.
Wegen $(-1)^k = \cos(\pi k) = \cosh(i\pi k)$ ist

$$\exp\left[\pi i\left(1+\cosh\left(2\frac{\pi i}{2}k\right)\right)\right] = \exp\left[\pi i\left(1+(-1)^k\right)\right] = 1 \neq f(0),$$

$$\text{und somit } g(0) \neq \frac{\pi i}{2}k \text{ für alle k} \in \mathbb{Z}.$$

Mit (4.1a) folgt: $a_1 = f'(0) = \pi i f(0)\cdot 2g'(0)\sinh\big(2g(0)\big)$ und somit
$g'(0) = a_1\big(2\pi i a_0\sinh[2g(0)]\big)^{-1}$, da $\sinh\big(2g(0)\big) = i\sin\big(-2ig(0)\big) \neq 0$ wegen $g(0) \notin i\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
□

4.2 Der kleine Satz von Picard

Satz 4.4 (<u>Der kleine Satz von Picard</u>).

> *Für eine nichtkonstante, ganze Funktion $f(z)$*
> *gibt es höchstens ein $w \in \mathbb{C}$ mit $f(z) \neq w$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Es seien w_1,$w_2 \in \mathbb{C}$ mit $w_1 \neq w_2$, und es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die weder w_1 noch w_2 annimmt, das heißt $f(z) \neq w_1$ und $f(z) \neq w_2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Die ganze Funktion $\tilde{f}(z) := \dfrac{f(z)-w_1}{w_2-w_1}$ nimmt somit weder Null noch Eins an.

Indem wir zeigen, dass $\tilde{f}$ konstant ist, verifizieren wir die Behauptung. Hierzu nehmen wir nun an, dass $\tilde{f}$ nicht konstant ist, und führen dies zum Widerspruch.

Da $\tilde{f}$ den Voraussetzungen aus Lemma 4.1 genügt, existiert eine ganze Funktion g, explizit beschrieben in Bemerkung 4.2, mit $U_1(\eta) \not\subset g(\mathbb{C})$ für alle $\eta \in \mathbb{C}$. g ist nach Bemerkung 4.2 eine nichtkonstante Funktion und nur abhängig von $\tilde{f}$. Deshalb gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $g'(\alpha) \neq 0$.

Wir betrachten nun die Funktion $h(z) := \dfrac{1}{16}g\left(\dfrac{16z}{g'(\alpha)}+\alpha\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Gemäß Lemma 4.1 gilt also:

$$U_1(\eta) \not\subset 16h(\mathbb{E}) \text{ für jedes } \eta \in \mathbb{C},$$

und daher ist

$$\tfrac{1}{16}U_1(\eta) = U_{1/16}\left(\tfrac{1}{16}\eta\right) \not\subset h\left(\mathbb{E}\right) \text{ für alle } \eta \in \mathbb{C}.$$

Damit folgt:

$$U_{1/16}(\eta) \not\subset h(\mathbb{E}) \subset h(\mathbb{C}) = \tfrac{1}{16}g(\mathbb{C}) \text{ für alle } \eta \in \mathbb{C}. \tag{4.4a}$$

Satz 4.4 vgl. [Kra07, Paragraph 2: Satz 2.1].

Anschaulich gesehen ist also das Bild $h(\mathbb{C})$ die um den Faktor $\frac{1}{16}$ „zusammengezogene“ Bildmenge $g(\mathbb{C})$, weshalb auch die Gitterpunkte in Abb. 1 um den Faktor $\frac{1}{16}$ enger „zusammenrücken“.

Natürlich ist auch $h(z)$ eine ganze Funktion und insbesondere:

$$h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}) \text{ mit } h'(0) = \frac{1}{16}\frac{16}{g'(\alpha)}g'(\alpha) = 1.$$

Schließlich folgt dann mit dem Blochschen Satz 2.8:

Es gibt ein $\eta \in \mathbb{C}$ mit $U_{1/16}(\eta) \subset h(\mathbb{E})$ im Widerspruch zu (4.4a). Folglich ist $\tilde{f}$ konstant und mithin auch f konstant in $\mathbb{C}$. Wir konnten also zeigen, dass eine ganze Funktion, die mindestens zwei verschiedene Werte aus $\mathbb{C}$ auslässt, konstant ist. Damit folgt die Behauptung. □

Die folgende Aussage ist äquivalent zum kleinen Picardschen Satz 4.4:

Satz 4.5 (Alternative Fassung).
Es seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, und es gelte $1 = e^f + e^g$. Dann sind f und g konstant.

Beweis.

(i) Es seien f, g ganze Funktionen mit der Eigenschaft $1 = e^f + e^g$ in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$e^f = 1 - e^g \neq 1 \text{ und } e^f \neq 0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

Da mit f auch e^f eine ganze Funktion ist, ist nach Satz 4.4 e^f konstant in $\mathbb{C}$. Somit ist dann f und mithin auch g konstant in $\mathbb{C}$. Also gilt Satz 4.5.

(ii) Es sei f eine ganze Funktion mit $f \neq 1$ und $f \neq 0$ in $\mathbb{C}$. Gemäß Korollar 1.4 zum Cauchyschen Integralsatz gibt es dann ganze Funktionen g und h mit $1 - f = e^g$ und $f = e^h$. Weil nun $e^g + e^h = 1 - f + f = 1$ in $\mathbb{C}$, folgt mit Satz 4.5, dass g, h und mithin f konstant sind in $\mathbb{C}$. Damit gilt Satz 4.4.

□

Wir schließen dieses Kapitel mit einer für meromorphe Funktionen ausgelegten Variante des Picardschen Satzes.

Satz 4.6 (Der kleine Satz von Picard für meromorphe Funktionen).
Jede meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$, die drei paarweise verschiedene Werte $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ auslässt, ist konstant.

Beweis. Es sei h eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit $h(z) \neq w_i$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $i = 1, 2, 3$ mit paarweise verschiedenen w_i's.

$$\text{Dann ist } \frac{1}{h - w_1} \text{ eine ganze Funktion, die } \frac{1}{w_2 - w_1} \text{ und } \frac{1}{w_3 - w_1} \text{ auslässt.}$$

Gemäß Satz 4.4 ist dann h konstant. □

Satz 4.5 vgl. [RS06, Kapitel 10: Bem. zum Beweis des kleinen Picardschen Satzes 10.2.2, Seite 233].
Satz 4.6 vgl. [RS06, Kapitel 10: Kleiner Picardscher Satz für meromorphe Funktionen 10.9, Seite 231].

4.3 Lemma von König

Um einen Einblick in die historische Entwicklung der Beweise zum kleinen Picardschen Satz zu erlagen, schließen wir dieses Kapitel mit einem jüngeren und eingänglicheren Beweis von H. König (1957).

Während wir nämlich zur Herleitung der Landauschen Gleichung (4.1a) drei Hilfsfunktionen definieren, die Eindeutigkeit bezüglich des Logarithmus beachten und Relationen zwischen den hyperbolischen Funktionen heranziehen müssen, lässt sich die iterierte Kosinusfunktion von H. König, welche ebenso gemäß Lemma 4.1 eine holomorphe Funktion g implizit beschreibt, bequem durch wiederholtes Anwenden von Korollar 1.4 vergleichsweise einfach herleiten. Zudem werden wir dank der iterierten Darstellung leichter zeigen können, dass der Schnitt eines Gitternetzes $A \subset \mathbb{C}$ mit dem Bild von g leer ist. Auch die Abschätzung des Abstandes zweier benachbarter Gitterpunkte geht leichter von der Hand.

Lemma 4.7.
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $1 \notin f(G)$ und $-1 \notin f(G)$. Dann gibt es ein $F \in \mathcal{O}(G)$, so dass gilt

$$f = \cos F \text{ in } G.$$

Beweis. Da f nach Voraussetzung weder 1 noch -1 animmt, ist $1 - f^2$ nullstellenfrei in G. Nach Korollar 1.4 zum Cauchyschen Integralsatz gibt es somit eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$, so dass

$$f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig) = 1 \text{ in } G. \tag{4.7a}$$

Damit ist $f + ig$ nullstellenfrei in G, weshalb es wiederum mit Korollar 1.4 ein $F \in \mathcal{O}(G)$ gibt, so dass $f + ig = \exp(iF)$ in G. Weil zudem nach (4.7a) $f - ig = (f + ig)^{-1}$ ist, folgt $f - ig = \exp(-iF)$ in G. Also ist

$$f = \frac{1}{2}\left(e^{iF} + e^{-iF}\right) =: \cos F \text{ in } G.$$

□

Lemma 4.8 (König, 1957).
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $0 \notin f(G)$ und $1 \notin f(G)$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{O}(G)$, so dass gilt

$$f = \frac{1}{2}\left[1 + \cos \pi\big(\cos \pi g\big)\right] \text{ in } G.$$

$g(G)$ enthält dann keine Scheiben vom Radius Eins.

Beweis.

(i) Da die Funktion $2f - 1$ die Werte ± 1 in G auslässt, gibt es nach obigem Lemma 4.7 ein $F \in \mathcal{O}(G)$ mit $2f - 1 = \cos \pi F$ in G, welches alle ganzzahligen Werte und insbesondere ± 1 auslässt. Daher gibt es wiederum mit Lemma 4.7 ein $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $F = \cos \pi g$ in G.

Lemma 4.7 vgl. [RS06, Kapitel 10: Lemma 10.10, Seite 231].
Lemma 4.8 vgl. [RS06, Kapitel 10: Satz 10.11, Seite 232].

(ii) Wir setzen $A := \left\{ m \pm i\pi^{-1} \log\left(n + \sqrt{n^2-1}\right), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ und zeigen zunächst: $A \cap g(G) = \emptyset$. Für ein $a := p \pm i\pi^{-1} \log\left(q + \sqrt{q^2-1}\right) \in A$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi a) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\pi a} + e^{-i\pi a}\right) \\
&= \frac{1}{2}(-1)^p \left[\left(q + \sqrt{q^2-1}\right)^{-1} + \left(q + \sqrt{q^2-1}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2}(-1)^p \left[\frac{\left(q - \sqrt{q^2-1}\right)}{q^2 - (q^2-1)} + \left(q + \sqrt{q^2-1}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2}(-1)^p 2q = (-1)^p q \in \mathbb{Z}, \text{ wobei } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Damit ist $\cos\pi\,(\cos\pi a) = \pm 1$ für $a \in A$. Weil aber nach Voraussetzung weder Null noch Eins im Bild $f(G)$ liegt, nimmt g den Werte a nicht an in G. Folglich ist $g(G) \cap A$ leer.

Die Punkte aus A sind anschaulich die Eckpunkte eines Rechtecknetzes ähnlich dem in Lemma 4.1 gegebenen Schaubild mit dem wesentlichen Unterschied, dass hier im Gegensatz zur Abb. 1 die Abstände in Richtung der reellen Achse konstant sind und in Richtung der imaginären Achse variieren. Anhand der Definition von A sieht man leicht, dass der Abstand zweier benachbarter Punkte aus A entlang der reellen Achse stets Eins ist, während er sich in Richtung der imaginären Achse mit geringem Aufwand wie folgt abschätzen lässt:

$$
\pi^{-1}\log\left(n+1+\sqrt{(n+1)^2-1}\right) - \pi^{-1}\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) = \pi^{-1}\log\frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}
$$

$$
\leq \pi^{-1}\log\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) \leq \pi^{-1}\log\left(2+\sqrt{3}\right) < \pi^{-1}\pi = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ wegen}
$$

der Monotonie des reellen Logarithmus. Ganz analog zum Beweis von Lemma 4.1 gibt es nun zu jedem $w \in \mathbb{C}$ ein $a \in A$ mit $|\mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, w| \leq \frac{1}{2}$ und $|\mathrm{Im}\, a - \mathrm{Im}\, w| < \frac{1}{2}$, das heißt $|a - w| < \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. In jeder Scheibe vom Radius 1 liegt somit mindestens ein Punkt aus A. Da wir aber zeigen konnten, dass $g(G)$ und A disjunkt sind, kann eine solche Scheibe nicht im Bildgebiet $g(G)$ liegen. □

Abschließend zeigen wir noch, dass sich unter der Verwendung von Korollar 2.10 der Beweis zum Picardschen Satz 4.4 recht elegant in zwei Zeilen ausdrücken lässt:

Gemäß Lemma 4.8 gilt: $f = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\pi(\cos\pi g)\right] \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $0 \notin f(\mathbb{C})$, $1 \notin f(\mathbb{C})$ und $U_1(\eta) \not\subset g(\mathbb{C})$ für alle $\eta \in \mathbb{C}$. Nach Korollar 2.10 is dann g konstant und mithin f konstant. □

5 Anwendungen zum kleinen Satz von Picard

5.1 Fixpunktsatz

Anwendung 5.1 (Fixpunktsatz).
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann hat $f \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stets einen Fixpunkt, es sei denn, f ist eine Translation $z \mapsto z + b,\ b \neq 0$.

Beweis. Es sei $f \circ f$ fixpunktfrei, das heißt $f\left(f(z)\right) \neq z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist auch f fixpunktfrei. Die Funktion g definiert durch

$$g(z) := \frac{f\left(f(z)\right) - z}{f(z) - z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}),$$

lässt also wegen $f\left(f(z)\right) \neq z$ und $f(z) \neq z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ die Werte Null und Eins aus. Nach dem Picardschen Satz 4.4 ist g damit konstant und es existiert ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ mit

$$\begin{aligned} & \frac{f\left(f(z)\right) - z}{f(z) - z} = c \\ \Leftrightarrow\quad & f\left(f(z)\right) - cf(z) = z(1 - c) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{5.1a}$$

Differentiation von (5.1a) nach z liefert:

$$\begin{aligned} & f'\left(f(z)\right) f'(z) - cf'(z) = (1 - c) \\ \Leftrightarrow\quad & f'(z)\Big(f'\left(f(z)\right) - c\Big) = 1 - c \text{ für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{5.1b}$$

Da $c \neq 1$ ist, hat f' keine Nullstellen und $f' \circ f$ keine c-Stellen in $\mathbb{C}$. Also nimmt die ganze Funktion $f' \circ f$ weder Null noch c an in $\mathbb{C}$ und ist somit gemäß dem Picardschen Satz 4.4 konstant. Damit ist nach (5.1b) auch f' konstant und mithin f linear, das heißt f hat die Darstellung $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Weil nun f fixpunktfrei ist, gilt: $f(z) - z = (a - 1)z + b \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt dies aber nur im Fall $a = 1$ und $b \neq 0$, da $f(z) - z$ ansonsten stets eine Nullstelle in $\dfrac{b}{1 - a}$ besitzt. □

5.2 Fermat-Gleichung

Die Fragestellung nach der Lösbarkeit der Fermat-Gleichung $X^n + Y^n = 1,\ n \geq 3$ durch in $\mathbb{C}$ meromorpher Funktionen lässt sich mit dem kleinen Picardschen Satz beantworten. Alle durch ganze Funktionen gegebenen Lösungen der Fermat-Gleichung lassen sich im Fall $n = 2$ noch mittels konventioneller Hilfsmittel geben. Bestimmen wir also zunächst alle Lösungen aus $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ zum Spezialfall $n = 2$.

Anwendung 5.1 vgl. [KS12, Übungsblatt 8: Aufgabe 31].

Es seien f und g ganze Funktionen mit $f^2 + g^2 = 1$.

$$\begin{aligned} & f^2 + g^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (f + ig)\,(f - ig) = 1 \qquad (5.2a) \\ \Rightarrow \quad & f + ig \neq 0 \text{ und } f - ig \neq 0 \text{ in } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Gemäß Korollar 1.4 gibt es also ganze Funktionen h_1 und h_2 mit

$$f + ig = e^{h_1} \text{ und } f - ig = e^{h_2} \text{ in } \mathbb{C}. \qquad (5.2b)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & e^{h_1} - ig = ig + e^{h_2} \\ \Leftrightarrow \quad & g = \frac{e^{h_1} - e^{h_2}}{2i} \text{ in } \mathbb{C}. \qquad (5.2c) \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich aus (5.2a) und (5.2b): $e^{h_1+h_2} = 1$, weshalb $h_1 = -h_2 + 2\pi i\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}$ ist. (5.2c) lässt sich damit wie folgt ausdrücken:

$$g = \frac{e^{-h_2} - e^{h_2}}{2i} = \frac{e^{ih} - e^{-ih}}{2i} \text{ für } h := ih_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Also ist $g = \sin \circ h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Mit (5.2b) können wir dann auch nach f auflösen:

$$\begin{aligned} f = ig + e^{h_2} &= \frac{e^{ih} - e^{-ih}}{2} + e^{-ih} \\ &= \frac{e^{ih} - e^{-ih} + 2e^{-ih}}{2} \\ &= \frac{e^{ih} + e^{-ih}}{2} = cos \circ h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Alle Lösungen von $f^2 + g^2 = 1$ aus $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ sind somit durch $g = sin \circ h$ und $f = cos \circ h$ mit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gegeben. □

Anwendung 5.2 (Fermat-Gleichung).
Es seien f, g meromorphe Funktionen in $\mathbb{C}$ ohne gemeinsame Polstellen, und es gelte $f^n + g^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$. Dann sind f und g konstant.

Beweis. Es seien also f, g meromorphe Funktionen in $\mathbb{C}$, und es seien die Polstellenmengen von f und g disjunkt, das heißt $P(f) \cap P(g) = \emptyset$. Mit der Bedingung $f^n + g^n = 1$ folgt aber $P(f) = P(g)$ und somit $P(f) = P(g) = \emptyset$. Demnach sind f und g ganze Funktionen.

Mit ζ_n^ν als n-te Einheitswurzel definiert durch $\zeta_n^\nu := \exp \dfrac{2\pi i\nu}{n}$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$, gilt die folgende Faktorisierung:

$$f^n + g^n = \left(f - g\right)\left(f - \zeta_n^1 g\right) \cdot \ldots \cdot \left(f - \zeta_n^{n-1} g\right) \overset{!}{\equiv} 1.$$

Anwendung 5.2 vgl. [KS12, Übungsblatt 8: Aufgabe 29].

Es folgt:

$$\begin{aligned} f - g &=: h \neq 0, \\ f - \zeta_n^1 g &= h + \left(1 - \zeta_n^1\right) g \neq 0, \\ f - \zeta_n^2 g &= h + \left(1 - \zeta_n^2\right) g \neq 0, \\ &\vdots \\ \text{und } f - \zeta_n^{n-1} g &= h + \left(1 - \zeta_n^{n-1}\right) g \neq 0 \text{ in } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(1 - \zeta_n^1\right) \frac{g}{h} \neq 0 \text{ und } 1 + \left(1 - \zeta_n^2\right) \frac{g}{h} \neq 0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

Für die ganze Funktion $\frac{g}{h}$ gilt damit:

$$\frac{g}{h} \neq \frac{1}{\zeta_n^1 - 1} \text{ und } \frac{g}{h} \neq \frac{1}{\zeta_n^2 - 1} \text{ in } \mathbb{C}.$$

Gemäß dem kleinen Picardschen Satz 4.4 ist also $\frac{g}{h}$ konstant, weshalb es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt mit $\frac{g}{h} \equiv c$ in $\mathbb{C}$. Für $c = 0$ ist $g \equiv 0$ und somit f konstant. Für $c \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} g &= c\,(f - g) \\ \Rightarrow \quad g\left(\frac{1}{c} + 1\right) &= f \text{ in } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$, so dass $f^n + g^n = \tilde{c} g^n + g^n = (\tilde{c} + 1) g^n = 1$ in $\mathbb{C}$.

Folglich ist g konstant und mithin auch f konstant. □

5.3 Eigenschaften transzendenter Funktionen

Definition 5.3.
*Eine ganze Funktion f, die kein Polynom ist, heißt **transzendent**.*

Satz 5.4.
Es sei f transzendent. Dann gilt:

$$g(z) := f\left(\tfrac{1}{z}\right) \text{ besitzt im Nullpunkt eine wesentliche Singularität.}$$

Beweis. Da f ganz und kein Polynom ist, besitzt f die Reihendarstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ um Null mit $a_k \neq 0$ für unendlich viele k. Somit besitzt $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_{-k} z^k$ unendlich viele Koeffizienten $a_{-k} \neq 0$ für $k < 0$. Folglich besitzt g im Nullpunkt eine wesentliche Singularität. □

Definition 5.3 vgl. [Kra07, Paragraph 4: Definition 4.1].
Satz 5.4 vgl. [Kra07, Paragraph 4: Korollar 4.1 i].

Anwendung 5.5.

(i) *Zu jeder transzendenten Funktion f gibt es höchstens ein Polynom p mit $f(z) \neq p(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

(ii) *Es gibt keine ganze Funktion g mit $g(z) \neq z$ und $g(z) \neq -z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis.

(i) Es seien p und q Polynome mit $p \neq q$, $f \neq p$ und $f \neq q$ in $\mathbb{C}$. Betrachten wir die ganze Funktion h, definiert durch

$$h(z) := \frac{f(z) - p(z)}{f(z) - q(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wegen $h(z) \neq 0$ und $h(z) \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ist h nach dem kleinen Picardschen Satz 4.4 konstant in $\mathbb{C}$, das heißt es gibt ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ mit $h(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt:

$$c = \frac{f(z) - p(z)}{f(z) - q(z)}$$

$$\text{und damit } f(z) = \frac{p(z) - cq(z)}{1 - c} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{5.5a}$$

Dass nun die transzendente Funktion f die polynomiale Darstellung aus (5.5a) innehat, ist ganz offensichtlich ein Widerspruch.

(ii) Es sei g eine ganze Funktion mit $g(z) \neq z$ und $g(z) \neq -z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus (i) folgt sofort, dass g nicht transzendent ist. Des Weiteren ist g nicht konstant, da es kein $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $g(z) = c \neq z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra 1.9 besitzt jedes nichtkonstante komplexe Polynom genauso viele Nullstellen inklusive Vielfachheiten, wie sein Grad angibt. Da aber nach Voraussetzung $g(z) - z$ und $g(z) + z$ nullstellenfrei sind, kann folglich g kein Polynom sein. Es gibt also keine ganze Funktion g mit $g(z) \neq z$ und $g(z) \neq -z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. □

Alternativ lässt sich 5.5 (ii) auch direkt mit dem kleinen Picardschen Satz zeigen, ohne 5.5 (i) heranziehen zu müssen:

Beweis. Es sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $g(z) \neq z$ und $g(z) \neq -z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Funktionen f gegeben durch

$$f(z) := \frac{g(z) + z}{g(z) - z} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Da f ganz und nach Voraussetzung nullstellenfrei ist in $\mathbb{C}$, ist $h(z) := \log f(z)$ nach Korollar 1.4 ebenfalls ganz. Man sieht leicht, dass $f(z) = 1$ nur für $z = 0$ gilt. Hieraus folgern wir die Gleichung

$$h(0) = \log f(0) = \log 1 = \log e^{2\pi i k} = 2\pi i k \text{ für ein festes } k \in \mathbb{Z}.$$

Anwendung 5.5 vgl. [KT07, Übungsblatt 9: Aufgabe 35].

h ist damit der eindeutig bestimmte k-te Zweig des Logarithmus von f, denn durch das Festlegen von $h(0)$ ist auch jeder weiter Logarithmus eindeutig bestimmt. Da für alle $u, v \in \operatorname{Bild} h$ stets $|\operatorname{Im} u - \operatorname{Im} v| \leq 2\pi$ ist, gibt es unendlich viele Werte aus $\mathbb{C}$, die $h(z)$ für kein $z \in \mathbb{C}$ annimmt. Daher ist gemäß Satz 4.4 h konstant und folglich auch f konstant. Wegen $f(0) = 1$ ist also $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und somit gilt:

$$1 = \frac{g(z) + z}{g(z) - z}$$

$$\text{und somit} \qquad 0 = 2z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \qquad \text{Widerspruch.}$$

□

6 Die Sätze von Landau und Schottky

6.1 Definitionen und Hilfssätze

Definition 6.1.
Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ mit $a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$ und $a_1 \neq 0$. Gemäß dem Zusatz 4.3 zum Lemma von Landau definieren wir:

(i) $\psi_0(a_0) := \log\left(\sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}} + \sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i} - 1}\right)$ *als Hauptwert, sowie*

(ii) $\psi_1(a_0, a_1) := a_1 \left(2\pi a_0 \sinh\left(2\psi_0(a_0)\right)\right)^{-1}$.

Lemma 6.2.
Für $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ mit $a_0 \neq 0$ und $a_0 \neq 1$ sind $\psi_0(a_0)$ und $\psi_1(a_0, a_1)$ wohldefiniert mit

$$\psi_0(a_0) \neq \pm \log\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + i\frac{n\pi}{2} \quad \textit{für alle } m \in \mathbb{N} \textit{ und } n \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist $\psi_0(a_0) \neq i\frac{n\pi}{2}$ und $\sinh\left(2\psi_0(a_0)\right) \neq 0$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $a_0 \neq 0$, ist $\log(a_0)$ wohldefiniert. Weil wir zudem $a_0 = e^{\log a_0} \neq 1$ voraussetzen, ist $\log a_0 \neq 2\pi i k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und damit $\frac{\log a_0}{2\pi i} \notin \mathbb{Z}$. Insbesondere ist dann auch $\frac{\log a_0}{2\pi i} \neq 0$ und $\frac{\log a_0}{2\pi i} \neq 1$.

Wir setzen $$u_0 := \sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}} := \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{\log a_0}{2\pi i}\right)\right)$$

und $$v_0 := \sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i} - 1} := \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{\log a_0}{2\pi i} - 1\right)\right).$$

Folglich sind dann u_0 und v_0 wohldefiniert mit $(u_0 + v_0)(u_0 - v_0) = u_0^2 - v_0^2 = 1 \neq 0$.(6.2a)
Somit ist $\psi_0(a_0) = \log(u_0 + v_0)$ wohldefiniert.

Annahme:
Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass gilt: $\log(u_0 + v_0) = \log\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + i\frac{n\pi}{2}$.

Aus $$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + i\frac{n\pi}{2} &= \log\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + \log\left(i^n\right) \\ &= \log\left(\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) \cdot i^n\right)\end{aligned}$$

folgt dann $$u_0 + v_0 = i^n\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right).$$

Dann gilt $$(u_0 + v_0)^2 = (-1)^n\left(2m + 2\sqrt{m(m-1)} - 1\right)$$

und mit (6.2a) $$(u_0 - v_0)^2 = \left(\frac{1}{u_0 + v_0}\right)^2$$

Definition 6.1 vgl. [Kra07, Paragraph 3: Definition 3.1].
Lemma 6.2 vgl. [Kra07, Paragraph 3: Lemma 3.1].

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{i^n(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})}\right)^2 \\
&= (-1)^n \left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)^2 \qquad (6.2b)\\
&= (-1)^n \left(2m - 2\sqrt{m(m-1)} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Klar ist, dass auch in (6.2b) der banale Zusammenhang $\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right) = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zum Einsatz kommt.

$$
\begin{aligned}
\text{Es folgt:}\quad 2(u_0^2+v_0^2) &= (u_0+v_0)^2 + (u_0-v_0)^2 \\
&= (-1)^n\left(2m+2\sqrt{m(m-1)}-1\right) + (-1)^n\left(2m-2\sqrt{m(m-1)}-1\right) \\
&= (4m-2)(-1)^n. \qquad (6.2c)
\end{aligned}
$$

Außerdem ergibt sich aus (6.2a): $\quad 2(u_0^2+v_0^2) = 2(u_0^2+(u_0^2-1)) = 4u_0^2-2. \qquad (6.2d)$

Aus (6.2c) und (6.2d) folgt dann: $\quad 4u_0^2 - 2 = (4m-2)(-1)^n$

und somit $\quad 2u_0^2 = (2m-1)(-1)^n + 1 \in 2\mathbb{Z}.$

Mit der Definition von u_0 folgt dann schließlich:

$$a_0 = \exp\left(2\pi i u_0^2\right) = 1 \text{ im Widerspruch zu } a_0 \neq 1.$$

Ganz analog zeigt man:

$$\log(u_0+v_0) \neq \log\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)+i\frac{n\pi}{2} = -\log\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)+i\frac{n\pi}{2} \text{ für } m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}.$$

Damit folgt die Behauptung für $\psi_0(a_0)$ und im Speziellen auch $\psi_0(a_0) \neq \frac{in\pi}{2}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Weil damit $-2i\psi_0(a_0) \neq -2i\frac{in\pi}{2} = \pi n$ für $n \in \mathbb{Z}$ ist, folgt:

$$\sinh\left(2\psi_0(a_0)\right) := \frac{1}{2}\left(e^{2\psi_0(a_0)} - e^{-2\psi_0(a_0)}\right) = i\sin\left(-2i\psi(a_0)\right) \neq 0,$$

womit dann auch $\psi_1(a_0,a_1)$ wohldefiniert ist. □

6.2 Satz von Landau

Satz 6.3 (Landau).
Es sei f holomorph in $\mathbb{E}_R$ mit $a_0 := f(0) \neq 0,\ a_0 \neq 1$ und $a_1 := f'(0) \neq 0$, und es sei

$$R > R(a_0,a_1) := \frac{16}{|\psi_1(a_0,a_1)|} = \frac{32\pi\left|a_0\sinh\left(2\psi_0(a_0)\right)\right|}{|a_1|}.$$

Dann gibt es ein $z \in \mathbb{E}_R$ mit $f(z) \in \{0,1\}$.

Beweis. Gemäß Lemma 6.2 ist $R(a_0,a_1)$ wohldefiniert. Es sei nun g die holomorphe Funktion gemäß dem Landauschen Lemma 4.1 unter der Annahme:

Satz 6.3 vgl. [Kra07, Paragraph 3: Satz 3.1].

$D = \mathbb{E}_R$, $f(z) \neq 0$ und $f(z) \neq 1$ für alle $z \in D$. Also gibt es kein $\eta \in \mathbb{C}$ mit $U_1(\eta) \subset g(D) = g(\mathbb{E}_R)$. Mit der Voraussetzung und dem Zusatz 4.3 gilt:

$$g(0) = \psi_0(a_0) \text{ und } \left|g'(0)\right| = |\psi_1(a_0, a_1)| = \frac{16}{R(a_0, a_1)} > \frac{16}{r} > \frac{16}{R} \text{ für } R(a_0, a_1) < r < R.$$

Folglich ist $r\,|g'(0)| > 16$ für $R(a_0, a_1) < r < R$. Wir betrachten nun die Funktion h definiert durch

$$h(z) := \frac{g(rz)}{rg'(0)} \text{ für } |z| \leq 1.$$

Somit ist $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ mit $h'(0) = 1$ und ferner $r|z| < R$. Gemäß dem Blochschen Satz 2.8 gibt es nun ein $\eta \in \mathbb{C}$ mit $U_{1/16} := U_{1/16}(\eta) \subset h(\mathbb{E})$. Des Weiteren gilt:

$$h(\mathbb{E}) = \frac{1}{rg'(0)} g(r\mathbb{E}) = \frac{e^{-i \arg g'(0)}}{r\,|g'(0)|} g(r\mathbb{E}) \subset \frac{e^{-i \arg g'(0)}}{r\,|g'(0)|} g(\mathbb{E}_R).$$

Es folgt
$$U_{1/16} \subset h(\mathbb{E}) \subset \frac{e^{-i \arg g'(0)}}{r\,|g'(0)|} g(\mathbb{E}_R)$$

und damit
$$e^{i \arg g'(0)} \underbrace{r\left|g'(0)\right|}_{>16} U_{1/16} \subset g(\mathbb{E}_R). \tag{6.3a}$$

In (6.3a) verursacht $e^{i \arg g'(0)}$ eine „Drehung“ der Umgebung $U_{1/16}$ um den Ursprung und $r\,|g'(0)|$ eine „Streckung“ von $U_{1/16}$ um einen Faktor echt größer 16. Somit gibt es ein $\eta^* \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$U_1(\eta^*) \subset e^{i \arg g'(0)} r \left|g'(0)\right| U_{1/16} \subset g(\mathbb{E}_R).$$

Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 4.1, wonach das Bild von g keine Scheiben vom Radius Eins enthält. □

Wie das folgende Korollar zeigt, ist der unwahrscheinlich wirkende Satz von Landau sogar stärker als der kleine Picardsche Satz.

Korollar 6.4.
Der Satz von Landau impliziert den kleinen Picardschen Satz 4.4.

Beweis. Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion, und es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_2$, $f(z) \neq z_1$ und $f(z) \neq z_2$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion g definiert durch

$$g(z) := \frac{f(z) - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

lässt dann die Werte Null und Eins aus. (6.4a)

Da f nicht konstant ist, gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $g'(w) \neq 0$, weshalb

$$h(z) := g\left(w + \frac{z}{g'(w)}\right) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

wohldefiniert ist. Nun gilt:

$$h(0) \neq 0,\ h(0) \neq 1 \text{ und } h'(0) = g'(w) \frac{1}{g'(w)} = 1 \neq 0.$$

Gemäß Satz 6.3 gibt es dann ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \in \{0, 1\}$ im Widerspruch zu (6.4a). □

Korollar 6.4 vgl. [RS06, Kapitel 10: Landaus Verschärfung des kleinen Picardschen Satzes 10.3.2, Seite 237].

Landau fügte seinen Satz 1904 als „unerwartete Tatsache“[6], dem keinen Picardschen Satz hinzu. Zur Formulierung des großen Picardschen Satzes ist darüber hinaus der folgende Satz von Schottky erforderlich.

6.3 Satz von Schottky

Satz 6.5 (Schottky).
Es sei f holomorph in $\mathbb{E}$ mit $f(z) \neq 0$ und $f(z) \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$, und es sei $a_0 := f(0) \neq 0$, $a_0 \neq 1$ und $\varphi(a_0, r) := \exp\left(\pi \exp\left[\frac{32r}{1-r} + 2\left|\psi_0(a_0)\right|\right]\right)$ mit $\psi_0(a_0)$ gemäß Definition 6.1.
Dann gilt:

$$|f(z)| \leq \varphi(a_0, r) \text{ für alle } |z| \leq r < 1.$$

Beweis. Es sei g die holomorphe Funktion gemäß dem Landauschen Lemma 4.1 mit $D = \mathbb{E}$. Ferner sei $a \in \mathbb{E}_r$ für $r \in (0,1)$ mit $g'(a) \neq 0$. Wir zeigen:

$$\left|g'(a)\right| < \frac{16}{1-r}.$$

Dazu definieren wir die Funktion h durch

$$h(z) := \frac{g\big(a + (1-r)z\big)}{(1-r)g'(a)}.$$

Weil das Argument von g in $\mathbb{E}$ liegt, fordern wir $|a + (1-r)z| < r + (1-r)|z| \leq 1$. Diese Bedingung wird von allen $z \in \overline{\mathbb{E}}$ erfüllt, womit $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ ist. Da überdies auch $h'(0) = \dfrac{(1-r)g'(a)}{(1-r)g'(a)} = 1$ ist, gibt es nach dem Blochschen Satz 2.8 ein $\eta \in \mathbb{C}$ mit

$$U_{1/16}(\eta) \subset h(\mathbb{E}) \subset \frac{g(\mathbb{E})}{(1-r)g'(a)}.$$

$$\text{Somit ist } U_1(\eta) = 16 \cdot U_{1/16}(\eta) \subset \frac{16}{(1-r)g'(a)} g(\mathbb{E}).$$

Da nun aber nach Lemma 4.1 keine Eins-Umgebung in $g(\mathbb{E})$ liegt, folgt $\dfrac{16}{(1-r)\left|g'(a)\right|} > 1$ und damit $|g'(a)| < \dfrac{16}{1-r}$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{E}_r$ mit $g'(a) \neq 0$. Mit dem Fundamentalsatz der Analysis und der Standardabschätzung für Integrale folgt dann:

$$|g(z) - g(0)| = \left|\int_0^z g'(\zeta) d\zeta\right| \leq \int_0^z \left|g'(\zeta)\right| d\zeta < \frac{16r}{1-r} \text{ für } 0 \leq |z| \leq r < 1.$$

Dann gilt mit Zusatz 4.3:

$$|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{16r}{1-r} = |\psi_0(a_0)| + \frac{16r}{1-r} =: \varphi_1(a_0, r) \text{ für } 0 \leq |z| \leq r < 1.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\pi i \cosh\big(2g(z)\big)\right| &\leq \frac{\pi}{2}\Big(\exp\big(2\operatorname{Re} g(z)\big) + \exp\big(-2\operatorname{Re} g(z)\big)\Big) \\
&\leq \frac{\pi}{2}\Big(\exp\big(2|g(z)|\big) + \exp\big(2|g(z)|\big)\Big) \\
&\leq \frac{\pi}{2} 2\exp\big(2|g(z)|\big) \\
&\leq \pi \exp\big(2\varphi_1(a_0, r)\big) = \pi \exp\left(2\left|\psi_0(a_0)\right| + \frac{32r}{1-r}\right) \text{ für } |z| \leq r < 1,
\end{aligned}$$

[6] Vgl. [RS06, Seite 237].
Satz 6.5 vgl. [Kra07, Paragraph 3: Satzes 3.2].

und mit dem Landauschen Lemma 4.1 folgt dann schließlich:

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \Big|\exp\Big[\pi i\Big(1+\cosh\big(2g(z)\big)\Big)\Big]\Big| \\ &= \big|\exp\big[\pi i \cosh\big(2g(z)\big)\big]\big| \\ &= \exp\big[\mathrm{Re}\,\big(\pi i \cosh\big(2g(z)\big)\big)\big] \\ &\leq \exp\big|\pi i \cosh\big(2g(z)\big)\big| \\ &\leq \exp\left(\pi \exp\left[2\,|\psi_0(a_0)| + \frac{32r}{1-r}\right]\right) = \varphi(a_0, r) \text{ für } |z| \leq r < 1.\end{aligned}$$

□

Korollar 6.6.
Der Satz von Schottky impliziert den Satz 6.3 *von Landau für*

$$R(a_0, a_1) := \tfrac{2}{|a_1|}\varphi\left(a_0, \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{2}{|a_1|}\exp\left(\pi \exp\left[32 + 2\,|\psi_0(a_0)|\right]\right)$$

mit a_0 *und* a_1 *gemäß Satz* 6.3.

Beweis. Es sei f holomorph in $\mathbb{E}_R$ und a_0 und a_1 gemäß Satz 6.3. Sei zudem $f(z) \neq 1$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}_R$. Wir zeigen Satz 6.3 im Umkehrschluss, das heißt zu zeigen ist: $R \leq R(a_0, a_1)$.

Es gilt: $g(z) := f(Rz)$ ist holomorph in $\mathbb{E}$ mit $g(0) = a_0$, $g(z) \neq 0$ und $g(z) \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Mit der Cauchyschen Ungleichung 2.2 und dem Schottkyschen Satz 6.5 folgt dann:

$$|g'(0)| = R|a_1| \leq \max_{|z|=\frac{1}{2}} |g(z)| \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \leq 2 \max_{|z|=\frac{R}{2}} |f(z)| \leq 2\varphi(a_0, \tfrac{1}{2}).$$

Somit ist $R \leq \dfrac{2\varphi(a_0, \frac{1}{2})}{|a_1|} = R(a_0, a_1)$. □

Der Satz von Schottky scheint einen hohen Stellenwert innezuhaben, denn er impliziert den Landauschen und mithin auch den kleinen Picardschen Satz. Die von uns gegebene Variante ist zur Ausarbeitung des großen Picardschen Satzes bereits hinreichend, lässt sich aber hinsichtlich der Voraussetzungen noch deutlich verallgemeinern. Während wir nämlich in Satz 6.5 fordern, dass f nullstellen- und einsstellenfrei ist in $\mathbb{E}$, darf f in der verallgemeinerten Fassung endlich viele Null- und Einsstellen in $\mathbb{E}$ annehmen. Mit der folgenden präzisen Formulierung des verallgemeinerten Schottkyschen Satzes, den wir hier aber nicht beweisen, schließen wir dieses Kapitel.

Satz 6.7 (Verallgemeinerung von Schottky).
Es sei f holomorph in $\mathbb{E}_R$ mit der Reihenentwicklung $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ und besitze höchstens n Null- und höchstens m Einsstellen in $\mathbb{E}_R$ mit $n \leq m$. Des Weiteren seien k_i irgendwelche reelle positive Zahlen mit $|a_i| \leq k_i$ für $i = 0, \ldots, n$.

Dann gibt es eine nur von $k_0, k_1, \ldots, k_n$ sowie ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und R abhängige Schranke $S_{n,m} := S_{n,m}(k_0, k_1, \ldots, k_n, \vartheta, R)$, so dass für $|z| \leq \vartheta R$ die Abschätzung

$$|f(z)| \leq S_{n,m}$$

gilt.

Korollar 6.6 vgl. [Kra07, Paragraph 3: Bemerkung zum Satz 3.2].
Satz 6.7 vgl. [Bie82, Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen, S. 141 ff.].

7 Der große Satz von Picard

F. Casorati und K. Weierstraß zeigten 1868, dass eine holomorphe Funktion in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ beliebig nahe kommt. So beeindruckend der Satz von Casorati-Weierstraß im ersten Moment auch scheinen mag, so unbefriedigend ist es, dass er zu jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ nur in jeder Umgebung um diesen einen Bildpunkt garantieren kann. Sofort stellt sich die Frage, ob nun auch jeder Punkt in $\mathbb{C}$ tatsächlich angenommen wird. Davon scheint auch seiner Zeit E. Picard derart fasziniert gewesen zu sein, dass er diese Fragestellung 1879, nur elf Jahre später, beantwortete.[7]

7.1 Definitionen und Hilfssätze

Lemma 7.1.
Für $a_0 \in \mathbb{C}$ mit $a_0 \neq 0$ und $a_0 \neq 1$ gilt:

(i) $|\psi_0(a_0)| \leq 2 + \pi + \frac{1}{\pi}\big|\log|a_0|\big|$ und

(ii) $\big|\sinh\big(2\psi_0(a_0)\big)\big| \leq \exp\big(2\,|\psi_0(a_0)|\,\big) \leq e^{4+2\pi} \max\Big\{|a_0|^{\frac{2}{3}}, |a_0|^{-\frac{2}{3}}\Big\}.$

mit $\psi_0(a_0)$ gemäß Definition 6.1.

Beweis. Nach Definition 6.1 ist $\psi_0(a_0) = \log(u+v) = \log|u+v| + i\arg(u+v)$, wobei

$$u := \sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}} \text{ und } v := \sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i} - 1}$$

und $|\arg(u+v)| \leq \pi$, wegen der Festlegung von $\psi_0(a_0)$ als Hauptwert. Dass auch hier $(u+v)(u-v) = 1$ gilt, ist klar. Mit der Monotonie des reellen Logarithmus folgt dann:

$$\begin{aligned} \big|\log|u+v|\big| &= \max\left\{\log|u+v|,\ \log\left(\frac{1}{|u+v|}\right)\right\} \\ &= \max\left\{\log|u+v|,\ \log|u-v|\right\} \\ &\leq \log\big(|u|+|v|\big). \end{aligned} \tag{7.1a}$$

Für $x := \left|\dfrac{\log a_0}{2\pi i}\right| \geq 1$ folgt: $|u| = \sqrt{x}$ und $|v| \leq \sqrt{x+1}$. Damit lässt sich die Abschätzung aus (7.1a) wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned} &\leq \log\big(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\big) \\ &\leq \log\big(2\sqrt{x+1}\big) \\ &\leq \log\Big(2\big(\sqrt{x+1}\big)^2\Big) = \log\left(2\left|\frac{\log a_0}{2\pi i}\right| + 2\right). \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} |\psi_0(a_0)| = |\log(u+v)| &= \big|\log|u+v| + i\arg(u+v)\big| \\ &\leq \big|\,|\log|u+v|\big| + |\arg(u+v)| \\ &\leq \log\left(2\left|\frac{\log a_0}{2\pi i}\right| + 2\right) + \pi \\ &\leq \log\left(\left[\tfrac{1}{\pi}|\log a_0| + 1\right] + 1\right) + \pi. \end{aligned} \tag{7.1b}$$

[7] Vgl. [FB06, Seite 134 f.].
Lemma 7.1 vgl. [Kra07, Paragraph 3: Lemma 3.2].

Unter Verwendung der trivialen Abschätzung $\log(x+1) \le x$ für alle $x > 0$ können wir (7.1b) wie folgt weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} &\le \tfrac{1}{\pi}\,|\log a_0| + 1 + \pi \\ &\le \tfrac{1}{\pi}\big|\log|a_0| + i\arg a_0\big| + 1 + \pi \\ &\le \tfrac{1}{\pi}\left(\big|\log|a_0|\big| + \pi\right) + 1 + \pi = \tfrac{1}{\pi}\big|\log|a_0|\big| + 2 + \pi. \end{aligned}$$

Der Nachweis von (i) wäre somit erbracht. Mit der Definition (4.1b) des Sinus Hyperbolicus und (i) können wir nun (ii) leicht zeigen:

$$\begin{aligned} \big|\sinh\left(2\psi_0(a_0)\right)\big| &= \frac{1}{2}\Big|\exp\left(2\psi_0(a_0)\right) - \exp\left(-2\psi_0(a_0)\right)\Big| \\ &\le \frac{1}{2}\Big(\big|\exp\left(2\psi_0(a_0)\right)\big| + \big|\exp\left(-2\psi_0(a_0)\right)\big|\Big) \\ &\le \frac{1}{2}\Big(\exp\left(2\operatorname{Re}\psi_0(a_0)\right) + \exp\left(-2\operatorname{Re}\psi_0(a_0)\right)\Big) \\ &\le \frac{1}{2}\Big(\exp\left(2|\psi_0(a_0)|\right) + \exp\left(2|\psi_0(a_0)|\right)\Big) \\ &\le \exp\left(2|\psi_0(a_0)|\right) \\ &\underset{\text{(i)}}{\le} \exp\Big(4 + 2\pi + \tfrac{2}{\pi}\big|\log|a_0|\big|\Big) \\ &\le \exp(4+2\pi)\exp\Big(\max\Big\{\tfrac{2}{\pi}\log|a_0|, \tfrac{2}{\pi}\log\tfrac{1}{|a_0|}\Big\}\Big) \\ &= \exp(4+2\pi)\Bigg(\underbrace{\max\Big\{|a_0|, \frac{1}{|a_0|}\Big\}}_{>1,\text{ da } a_0\neq 1}\Bigg)^{2/\pi}. \end{aligned}$$

Wegen $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{2}{3}$ folgt schließlich (ii) und damit die Behauptung. □

Der Vollständigkeit halber definieren und klassifizieren wir zunächst den Begriff der isolierten Singularität, wenngleich dieser als bekannt vorausgesetzt werden kann.

Definition 7.2.
Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt ***isolierte Singularität*** *einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f in der punktierten Umgebung $\dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset D$ holomorph ist. Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt*

(i) ***außerwesentlich****, falls es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ in $U_\varepsilon(z_0)$ holomorph fortgesetzt werden kann, das heißt es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ existiert.*

(ii) ***wesentlich****, falls sie nicht außerwesentlich ist.*

Definition 7.3.
Es sei $W \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt W ***dicht*** *in $\mathbb{C}$, falls für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$W \cap U_\varepsilon(z) \neq \emptyset.$$

Definition 7.2 vgl. [FB06, Kapitel 3: Definition 4.3, Seite 131].
Definition 7.3 vgl. [FB06, Kapitel 3: Definition zum Satz von Casorati-Weierstraß 4.9, Seite 134].

Bemerkung 7.4.
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in D. $f(D)$ ist dicht in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $z_0 \in D$ gibt mit

$$|f(z_0) - z| < \varepsilon.$$

7.2 Satz von Casorati-Weierstraß

Satz 7.5 (Casorati-Weierstraß).
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $\dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset D$ eine punktierte Umgebung von z_0 in D mit $\varepsilon > 0$.

Dann ist das Bild $f\big(\dot{U}_\varepsilon(z_0)\big)$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen dazu an, dass eine punktierte Umgebung $\dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset D$ existiert, so dass $f\big(\dot{U}_\varepsilon(z_0)\big)$ nicht dicht ist in $\mathbb{C}$. Dann gibt es also ein $z_* \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$ mit $|f(z) - z_*| \geq r$ für alle $z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$. Die Funktion g definiert durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - z_*} \tag{7.5a}$$

ist somit holomorph und beschränkt in $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$. Gemäß dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.5 ist dann z_0 eine hebbare Singularität von g, das heißt g ist in $U_\varepsilon(z_0) = \dot{U}_\varepsilon(z_0) \cup \{z_0\}$ holomorph fortsetzbar. Ferner ist g nullstellenfrei in $U_\varepsilon(z_0)$. Folglich hat dann f durch Umformung von (7.5a) die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + z_* \text{ für alle } z \in U_\varepsilon(z_0),$$

und ist dort auch holomorph. Also hat f eine außerwesentliche Singularität in z_0. □

Beispiel 7.6.
Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ besitzt in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn:

$$\lim_{z \to 0-} f(z) = 0 \text{ und } \lim_{z \to 0+} f(z) = \infty.$$

Nach Casorati-Weierstraß ist das Bild $f\big(\dot{U}_\varepsilon(0)\big)$ somit dicht in $\mathbb{C}$ für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$.

Betrachten wir nun Abb. 2, so liegt die Vermutung nahe, dass f in jeder punktierten Umgebung von 0 jeden Wert aus $\mathbb{C}^*$ annimmt.

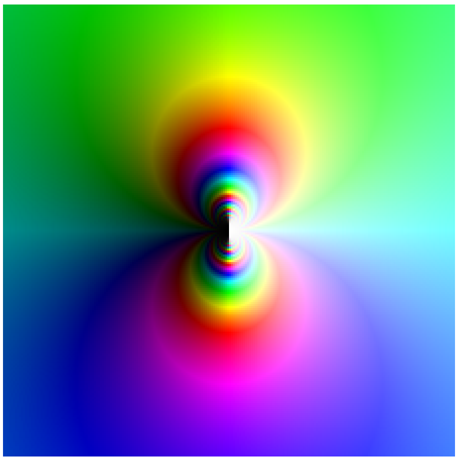

Abb. 2: Funktionsgraph von $e^{1/z}$ in einer punktierten Umgebung von 0 – Der Farbton veranschaulicht das Argument und die Helligkeit den Betrag.

Der Satz von Casorati-Weierstraß motiviert nun schließlich die Kernaussage dieser Arbeit, den großen Satz von Picard, welchen wir dank unserer Bemühungen in diesem wie im letzten Kapitel mit geringem Aufwand zeigen können.

Bemerkung 7.4 vgl. [FB06, Kapitel 3: Bemerkung zum Satz von Casorati-Weierstraß 4.9, Seite 135].
Satz 7.5 vgl. [FB06, Kapitel 3: Satz von Casorati-Weierstraß 4.9, Seite 134].
Beispiel 7.6 vgl. [Kra06, Kapitel 4: Beispiel zur Definition 4.1.1].

7.3 Der große Satz von Picard

Satz 7.7 (Der große Satz von Picard).

> *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $\dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset D$ eine punktierte Umgebung von z_0 in D.*
>
> *Dann gibt es höchstens ein $w \in \mathbb{C}$ mit $f(z) \neq w$ für alle $z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$.*

Beweis. Es seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ mit $w_1 \neq w_2$, und es sei $f(z) \neq w_1$ und $f(z) \neq w_2$ für alle $z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$. Annahme: z_0 ist eine wesentliche Singularität von f. Wir schließen indirekt, indem wir die Annahme widerlegen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\tilde{f}(z) := \frac{f(z_0 + \varepsilon z) - w_1}{w_2 - w_1} \text{ für alle } z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}\,,$$

welche dann weder Null noch Eins annimmt und holomorph ist in $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit einer wesentlichen Singularität in Null.

Somit ist $\tilde{f}$ gemäß Satz 7.5 von Casorati-Weierstraß dicht in $\mathbb{C}$, das heißt es gibt in jeder noch so kleinen Umgebung von Null einen Punkt a mit $\pi^e \leq |\tilde{f}(a)| \leq e^\pi$. Damit existiert eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$, so dass mit $r_n := |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist streng monoton fallend mit } r_1 < e^{-4\pi},$$

$$\text{sowie } \pi^e \leq |\tilde{f}(a_n)| \leq e^\pi \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ferner ist dann $\left|a_n e^{4\pi z}\right| = r_n e^{4\pi \operatorname{Re} z} < r_n e^{4\pi} < 1$ und $a_n e^{4\pi z} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{E}$.

Folglich ist die Funktion g_n definiert durch

$$g_n(z) := \tilde{f}\left(a_n e^{4\pi z}\right) \text{ für alle } z \in \mathbb{E}$$

holomorph in $\mathbb{E}$ mit $\pi^e \leq |g_n(0)| \leq e^\pi$, $g_n(z) \neq 0$ und $g_n(z) \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Nach Satz 6.5 von Schottky und Lemma 7.1 folgt dann für $|z| \leq \frac{1}{2}$:

$$|g_n(z)| \leq \varphi\left(g_n(0), \tfrac{1}{2}\right) \leq c := \exp\left(\pi \exp(32 + 4 + 2\pi) e^{\frac{2}{3}\pi}\right),$$

und damit

$$\begin{aligned}
M(r_n) := \max_{|z|=r_n} |\tilde{f}(z)| &= \max_{\varphi\in(-\pi,\pi]} \left|\tilde{f}\left(r_n e^{i\varphi}\right)\right| \\
&= \max_{\varphi\in(-\pi,\pi]} \left|\tilde{f}\left(r_n e^{i(\arg a_n + \varphi)}\right)\right| \\
&= \max_{\varphi\in(-\pi,\pi]} \left|\tilde{f}\left(a_n e^{i\varphi}\right)\right| \\
&= \max_{\varphi\in(-\pi,\pi]} \left|g_n\left(\tfrac{i\varphi}{4\pi}\right)\right| \leq c, \text{ weil } \left|\tfrac{i\varphi}{4\pi}\right| \leq \tfrac{1}{2} \text{ für } \varphi \in (-\pi, \pi].
\end{aligned}$$

Gemäß dem Maximumprinzip 1.8 ist somit $|\tilde{f}(z)| \leq c$ für alle $r_n \leq |z| \leq r_1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ folgt schließlich:

$$|\tilde{f}(z)| \leq c \text{ für alle } z \in \dot{U}_{r_1}(0).$$

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.5 ist dann z_0 eine außerwesentliche Singularität von f, im Widerspruch zur Annahme. □

Satz 7.7 vgl. [Kra07, Paragraph 4: Satz 4.1].

8 Anwendungen zum großen Satz von Picard

8.1 Eigenschaften ganzer Funktionen

Anwendung 8.1.
Es sei f transzendent und $f(z) = w_0$ habe höchstens endlich viele Lösungen für $w_0 \in \mathbb{C}$, so besitzt $f(z) = w$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq w_0$ unendlich viele Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Insbesondere gibt es stets ein $w \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = w$ unendlich viele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ besitzt.

Beweis. Es gelte $f(z) = w_0$ für höchstens endlich viele $z \in \mathbb{C}$. Folglich gibt es ein genügend kleines $r > 0$, so dass $h(z) := f\left(\frac{1}{z}\right) \neq w_0$ für alle $z \in \dot{U}_r(0)$. Ferner hat h nach Satz 5.4 eine wesentliche Singularität im Nullpunkt. Nun sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq w_0$.

Dann gibt es gemäß dem großen Picardschen Satz 7.7 ein $z_1 \in \dot{U}_r(0)$, also $0 < r_1 := |z_1| < r$ mit $h(z_1) = w$. Wiederum gibt es nach Satz 7.7 ein $z_2 \in \dot{U}_{r_1}(0)$, also $0 < r_2 := |z_2| < r_1 < r$ mit $h(z_2) = w$. Induktiv folgt:

Es gibt unendlich viele $z \in \dot{U}_r(0)$ mit $h(z) = w$ und somit unendlich viele $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{r}$, so dass $f(z) = w$.

Der Zusatz ist klar. □

Anwendung 8.2.
Polynome ersten Grades sind die einzigen injektiven ganzen Funktionen.

Beweis. Es sei also f eine ganze Funktion. Wir unterscheiden die Fälle, dass f entweder transzendent oder polynomial ist:

(i) Es sei f transzendent. Gemäß Anwendung 8.1 gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = w$ für unendlich viele $z \in \mathbb{C}$. Folglich ist f nicht injektiv.

(ii) Es sei f polynomial mit $n = \mathrm{grad} f \geq 2$. Gemäß dem Fundamental Satz der Algebra 1.9 hat f genau n Nullstellen inklusive Vielfachheiten. Wir unterscheiden die Fälle, dass f entweder genau eine n-fache oder mindestens zwei verschiedene Nullstellen besitzt.

   a) f besitze eine n-fache Nullstelle in $a \in \mathbb{C}$, das heißt f besitzt die Darstellung $f(z) = a_n(z-a)^n$ für ein $a_n \in \mathbb{C}^*$. Dann ist $f(\zeta_n^\nu + a) = a_n$ für alle n-ten Einheitswurzeln $\zeta_n^\nu := e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}$ mit $\nu = 0, \dots, n-1$. Damit ist f nicht injektiv.

   b) f besitze mindestens zwei verschiedene Nullstellen, das heißt es gibt $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f(z_1) = 0$. Also ist f nicht injektiv.

Wir konnten zeigen, dass alle ganzen Funktionen, bis auf Polynome ersten Grades, nicht injektiv sind. Damit folgt die Behauptung, denn Polynome ersten Grades sind selbstverständlich injektiv. □

Anwendung 8.1 vgl. [Kra07, Paragraph 4: Korollar 4.1 ii].
Anwendung 8.2 vgl. [KT07, Übungsblatt 9: Aufgabe 34].

9 Kurzbiographien

Charles Émile PICARD, französischer Mathematiker: geb. 1856 in Paris; ab 1881 Professor in Paris, 1889 Mitglied und ab 1917 auch Sekretär der Académie des Sciences, ab 1924 Mitglied der Académie francaise; gestorben 1941 in Paris. –Bedeutende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen und der Funktionentheorie, Vater der Werteverteilungstheorie. In seiner Grußadresse anlässlich des Internationalen Mathematikerkongresses 1920 in Straßburg findet sich das auf Lagrange zurückgehende Bonmot: „Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon“.

Edmund LANDAU, deutscher Mathematiker: geb. 1877 in Berlin; Schüler von Frobenius; 1909 o. Professor in Göttingen als Nachfolger von Minkowski; 1905 Schwiegersohn von Paul Ehrlich (Chemotherapie und Salvarsan); 1933 aus rassischen Gründen amtsenthoben; gestorben 1938 in Berlin.

Lars Valerian AHLFORS, finnisch-US-amerikanischer Mathematiker: geb. 1907 in Helsinki; 1936 Verleihung der Fields-Medaille; ab 1938 Professor in Helsinki; 1981 mit dem Wolf-Preis für Mathematik ausgezeichnet; Bedeutende Arbeiten zur Werteverteilungstheorie, Riemannsche Flächen und Kleinsche Gruppen; gestorben 1996 in Pittsfield, Massachusetts.

André BLOCH, französischer Mathematiker: geb. 1893 in Besancon; 1913 Student an der École Polytechnique; 1914/15 verwundet; 1917 nach blutigem Familiendrama Einweisung in eine psychiatrische Klinik, wo er bis zu seinem Tode 1948 blieb; 1948 posthume Verleihung des Becquerel-Preises.

Intelligenz ist jene Eigenschaft des Geistes, dank derer
wir schließlich begreifen, daß alles unbegreiflich ist.

Charles Émile Picard (1856 - 1941)

Kurzbiographien vgl. [RS06, Kurzbiographien 16, Seite 351 ff.].
Kurzbiographie zu L. Ahlfors vgl. [Lehr3].

Literaturverzeichnis

[Ahl38] Ahlfors, Lars: *An extension of Schwarz's lemma.* Trans. Amer. Math. Soc., 43, 350-364, 1938

[Bie82] Bieberbach, Ludwig: *David Hilbert, zu seinem sechzigsten Geburtstag am 23. Januar 1922.* Berlin : Springer, 1982

[Blo24] Bloch, André: *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation.* Paris : C.R. Acad. Sci.,178, 1924

[Bon90] Bonk, Minda: *On Bloch's constant.* Proc. AMS, 110(2), 889-894, 1990

[FB06] Freitag, Eberhard ; Busam, Rolf: *Funktionentheorie 1.* Heidelberg : Springer, 2006

[Gau15] Gauss, Carl F.: *Another new proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree.* Göttingen : Dissertation, 1815

[Kra07] Kratz, Werner: *Funktionentheorie 2.* Ulm : Vorlesungsskript[Kapitel 3], Wintersemester 2006/07

[Kra06] Kratz, Werner: *Analysis 4.* Ulm : Vorlesungsskript, Sommersemester 2006

[KS12] Kratz, Werner ; Setzer, Katja: *Übungen zur Funktionentheorie.* Ulm, Wintersemester 2011/12

[KT07] Kratz, Werner ; Tentler, Markus: *Übungen zur Funktionentheorie II.* Ulm, Wintersemester 2006/07

[Lehr3] Lehto, Olli: *On the Life and Work of Lars Ahlfors.* Mathematical Intelligencer, 1998, Nr.3

[RS01] Remmert, Reinhold ; Schumacher, Georg: *Funktionentheorie 1.* Münster und Marburg : Springer, 2001

[RS06] Remmert, Reinhold ; Schumacher, Georg: *Funktionentheorie 2.* Münster und Marburg : Springer, 2006